

## Statik mit finiten Elementen

### Zusammenfassung.

- Bei der FE-Berechnung eines Tragwerks ersetzt man den Originallastfall  $p$  durch einen arbeitsäquivalenten Lastfall  $p_h$ , d.h. bei jeder Einheitsverformung  $\varphi_i$  eines Knotens leisten  $p$  und  $p_h$  dieselbe Arbeit

$$\int_0^l p \varphi_i dx = \int_0^l p_h \varphi_i dx$$

Das FE-Programm löst den Ersatzlastfall exakt.

- Obwohl der Ersatzlastfall  $p_h$  scheinbar wenig mit dem Originallastfall zu tun hat, stimmen die Ergebnisse in der Regel trotzdem gut überein.
- Es gibt Programme, die den Abstand zwischen dem Originallastfall und dem FE-Lastfall messen und das Netz dort verfeinern, wo dieser Abstand groß ist. Das sind Programme, die adaptiv rechnen können. Das Programm verbessert also selbsttätig das Netz. In der Baustatik werden solche Programme nicht eingesetzt, obwohl die technischen Möglichkeiten hierzu heute schon bestehen.
- Echte Knotenkräfte gibt es nur in der Balkenstatik. Die Knotenkräfte in FE-Programmen sind äquivalente Knotenkräfte. Es sind Stellvertreter für die reale Belastung. Für ein FE-Programm sind Knotenkräfte 'Merker', die die Originalbelastung vertreten.
- Die Gleichung

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f}$$

formuliert nicht das Gleichgewicht an den Knoten, sondern die Gleichheit der virtuellen äußeren Arbeiten, d.h. die 'Wackeläquivalenz' zwischen dem Originallastfall und dem Ersatzlastfall.

- Die FE-Lösung stellt sich so ein, dass der Fehler in den Spannungen im Mittel möglichst klein wird.
- Alle Werte - Verschiebungen, Spannungen, Lagerkräfte, etc. - berechnet ein FE-Programm durch Überlagern der genäherten Einflussfunktion mit der äußeren Belastung.
- Je feiner ein Netz ist, umso besser gelingt es einem FE-Programm die Einflussfunktionen anzunähern und um so größer daher die Genauigkeit.
- Je höher die Ableitungen sind, die berechnet werden, umso mehr schnüren sich die Einflussfunktionen zusammen, umso 'spitzer' werden die Einflussfunktionen, und umso schlechter kann ein FE-Programm daher die Einflussfunktionen annähern.
- Die Genauigkeit der Ergebnisse einer Plattenberechnung nimmt daher in der Reihenfolge

$$w \quad w' \quad m_{xx}, m_{xy}, m_{yy} \quad q_x, q_y$$

ab.

- Die Einflussfunktionen für Lagerkräfte sind von derselben Bauart, wie Einflussfunktionen für die Durchbiegung  $w$  und daher auch auf groben Netzen schon gut zu approximieren.
- In Bereichen mit ausgeprägten Spannungsspitzen sollten integrale Schnittgrößen angesetzt werden, weil die Einflussfunktionen für integrale Schnittgrößen viel stabiler sind.
- Es hat keinen Zweck in der Nähe von Spannungsspitzen das Netz über ein gewisses Maß hinaus zu verfeinern.
- Bei der Kopplung unterschiedlicher Bauteile sollte beachtet werden, dass in der Methode der finiten Elemente nur noch ein 'schwaches' Schnittprinzip gilt. Die Kräfte, die etwa zwischen einem Balken und einer Platte übertragen werden, sind nicht mehr punktweise gleich, sondern nur noch arbeitsäquivalent, d.h. sie leisten gleiche Arbeiten bei entsprechenden Bewegungen.
- Auch durchdringen sich möglicherweise Platte und Balken, weil die Elementansätze ungleich sind, ohne dass das der FE-Berechnung groß schadet.
- Die Genauigkeit der Spannungen ist in Elementmitte am größten. Bei den Verformungen sind es die Knoten, wo die Genauigkeit am größten ist.
- Die FE-Methode ist ein Projektionsverfahren, deswegen kann man das Ergebnis einer FE-Berechnung auf demselben Netz nicht verbessern. Man muss ein feineres Netz wählen. Theoretisch gibt es auch Lastfälle, die keine Spannungen hervorrufen.
- Ein FE-Programm strebt nicht danach die Biegefläche einer Platte in den Knoten zu interpolieren. Die Interpolierende wäre im Sinne des Fehlerquadrates der Spannungen eine schlechtere Lösung als die FE-Lösung, d.h. die FE-Lösung ist noch näher an der exakten Lösung als die Interpolierende.

Weil dies so ist, kann man aber den Schluss ziehen: Wenn man das Gefühl hat, dass man auf dem vorliegenden Netz die Biegefläche gut interpolieren könnte, dann hat man ein gutes Netz.

- Die Einflussflächen für Knotenkräfte sind die Verformungen des Netzes, bei denen nur der eine Knoten abgesenkt wird und alle anderen Knoten in Ruhe sind. Deswegen oszillieren die FE-Knotenkräfte von unterstützenden Traggliedern wie Wänden.
- Zu den Stützen hin sollte man das Netz verfeinern, um den starken Anstieg der Stützenmomente besser zu erfassen. Ein Ein-Knotenmodell für die Stütze ist in der Regel ausreichend.
- Wann immer möglich sollte man die Nachgiebigkeit der Lager berücksichtigen, weil dies am ehesten geeignet ist, Singularitäten und Oszillationen zu mildern.
- Bei Scheiben ist die Steifigkeit von entscheidender Bedeutung für das Tragverhalten.
- Ob man bei einer FE-Berechnung noch zwischen direkter und indirekter Lagerung unterscheiden soll oder die Momente über den Wänden ausrundet, scheint uns zweifelhaft.
- Ein FE-Berechnung ist theoretisch auskonvergiert, wenn bei einer Netzverfeinerung sich die Ergebnisse kaum ändern. Diese Forderung ist für die Baupraxis unrealistisch, weil in jedem normalen Tragwerk Stellen vorkommen, wo die Spannungen theoretisch singular sind.

Weiterführende Hinweise

Auf der Internetseite

**[www.winfem.de](http://www.winfem.de)**

werden wir den heutigen Vortrag zum download bereitstellen. Dort finden Sie auch weiterführendes Material.

### **Literatur**

F. Hartmann, C. Katz Statik mit finiten Elementen, Springer-Verlag

Grätsch, T. , Hartmann, F.: Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 1: Scheiben. Bautechnik 78 (2001), S. 327-332.

Grätsch, T. , Hartmann, F.: Über ein Fehlerbild bei der Schnittgrößenermittlung mit finiten Elementen, Teil 2: Platten. Bautechnik 79 (2003), erscheint demnächst

Grätsch, T., Hartmann, F.: Warum ein FE-Programm falsch rechnet, Bauingenieur (2003), erscheint demnächst