

Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	11
1.1	Einführung	11
1.1.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	12
1.1.2	Der Satz von Betti	12
1.1.3	Einflussfunktionen	13
1.1.4	Identitäten	14
1.2	Greensche Identitäten	16
1.2.1	Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes	19
1.2.2	Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens	19
1.2.3	Durchbiegung w eines Seils	19
1.2.4	Durchbiegung w eines Balkens	19
1.2.5	Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung ..	20
1.2.6	Elastisch gebetteter Träger	20
1.2.7	Zugbandbrücke	21
1.3	Die Arbeitssätze der Statik	21
1.4	Ein Nullsummenspiel	23
1.5	Beispiele	24
1.5.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	24
1.5.2	Energieerhaltungssatz	26
1.5.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	26
1.6	Rahmen	29
1.7	Einzelkräfte und Einzelmomente	31
1.8	Lagersenkung	33
1.9	Federn	37
1.10	Temperatur	37
1.11	Die vollständige Arbeitsgleichung	39
1.12	Kurzform	39
1.13	Dualität	40
1.14	Mohr contra Betti	45
1.15	Schwache und starke Einflussfunktionen	47
1.16	Die kanonischen Randwerte	50
1.17	Die Reduktion der Dimension	52
1.18	Methode der Randelemente	54
1.19	Finite Elemente und Randelemente	57
1.20	Testfunktionen	58

1.21	Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?	59
1.22	Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?	59
1.23	Was ist Weg und was ist Kraft?	60
1.24	Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen	61
1.25	Warum das Minus in $-EA u'' = p$?	62
1.26	Die virtuelle innere Energie	63
1.27	Gleichgewicht	63
1.28	Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt	66
1.29	Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht	67
1.30	Gleichgewicht am verformten Tragwerk?	67
1.31	Quellen und Senken	68
1.32	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	69
1.32.1	Minimum oder Maximum?	71
1.32.2	Horizontale Tangente	73
1.32.3	Wenn das Material reißt	73
1.32.4	Wenn Lager entfallen	74
1.33	Unendliche Energie	77
1.34	Nichtlineare Probleme	83
2	Der Satz von Betti	85
2.1	Grundlagen	85
2.2	Einflussfunktionen für Weggrößen	87
2.2.1	Herleitung	89
2.3	Einflussfunktionen für Kraftgrößen	92
2.3.1	Einflussfunktion für $N(x)$	94
2.3.2	Einflussfunktion für $M(x)$	95
2.3.3	Die Kette der Einflussfunktionen	97
2.3.4	Momente differenzieren die Einflussfunktionen	99
2.3.5	Ein Rätsel	99
2.4	Statisch bestimmte Tragwerke	101
2.4.1	Polpläne	103
2.4.2	Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren	104
2.4.3	Berechnung der Verdrehungen	105
2.4.4	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.18	107
2.4.5	Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.19	108
2.4.6	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.20	109
2.4.7	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.21	110
2.4.8	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22	113
2.4.9	Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.23	113
2.4.10	Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.24	113
2.5	Statisch unbestimmte Tragwerke	115
2.6	Einflussfunktionen für Lagerkräfte	119
2.7	Die Nullstellen der Querkraft	121
2.8	Dirac-Deltas	122
2.9	Dirac Energie	125

2.10	Punktwerte bei Flächentragwerken	131
2.11	Dualität	133
2.12	Monopole und Dipole	135
2.13	Einflussfunktionen für integrale Werte	140
2.14	Einflussfunktionen rechnen rückwärts	145
3	Finite Elemente	147
3.1	Die Idee der finiten Elemente	147
3.2	Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind	150
3.3	Addition der lokalen Lösung	154
3.4	Projektion	156
3.5	Äquivalente Knotenkräfte	157
3.6	Festhaltekräfte	159
3.7	Shape forces und der FE-Lastfall	161
3.8	Der FE-Lastfall bei Platten	169
3.9	Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen	170
3.10	Funktionale	172
3.11	Beispiele	175
3.12	Die lokale Lösung	183
3.13	Die zentrale Gleichung	186
3.14	Der Satz von Maxwell	188
3.15	Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente	189
3.16	Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung	190
3.17	Die inverse Steifigkeitsmatrix als Analysetool	192
3.18	Inhomogenes Material	195
3.19	Sensitivitätsplots	197
3.20	Die inverse Steifigkeitsmatrix	199
3.21	Beispiele	200
3.22	Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion	205
3.23	Die Lagerkräfte der FE-Lösung	206
3.24	Einflussfunktion für ein starres Lager	208
3.25	Beispiel	210
3.26	Einflussfunktion für ein federndes Lager	211
3.27	Einflussfunktion für die Kraft in einer Stütze	213
3.28	Beispiel	215
3.29	Genauigkeit der Lagerkräfte	219
3.30	Positionsstatik und 3-D Berechnung	219
3.31	Punktkräfte und Punktlager bei Scheiben	223
3.32	Punktlager sind hot spots	225
3.33	Der amputierte Dipol	226
3.34	Einzelkräfte als Knotenkräfte	232
3.35	Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen	232

4	Betti extended	235
4.1	Herleitung	236
4.2	In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?	238
4.3	Exakte Werte	242
4.4	Eindimensionale Probleme	243
4.5	Flächentragwerke	245
4.6	Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied	249
4.7	Wenn die Lösung in V_h liegt	250
4.8	Adaptive Verfeinerung	252
4.9	Pollution	255
4.10	Singularitäten in Einflussfunktionen	257
5	Steifigkeitsänderungen	263
5.1	Ein erster Versuch	263
5.2	Zweites Beispiel	265
5.3	Strategie	266
5.4	Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten	267
5.5	Dipole und Monopole	268
5.6	Weggrößen und Kraftgrößen	270
5.7	Das Abklingen der Effekte	271
5.8	Die Bedeutung für die Praxis	272
5.9	Rahmen	274
5.10	Ausfall eines starren Lagers	276
5.11	Das statische Gefühl	285
5.12	Durchlaufträger	286
5.13	Längs und quer	289
5.14	Das Kraftgrößenverfahren	289
5.15	Austausch als Alternative	290
5.16	Ingenieurabschätzungen	292
5.17	Lokale Analyse	292
5.18	Nah und fern	297
5.19	Zusammenfassung	298
5.19.1	Ausfall eines starren Gelenklagers	298
5.19.2	Ausfall einer starren Einspannung	298
5.19.3	Änderung der Senksteifigkeit	299
5.19.4	Änderung der Drehfedersteifigkeit	299
5.19.5	Änderung der Längssteifigkeit in einem Stab	299
5.19.6	Änderung der Biegesteifigkeit in einem Balken	299
5.20	Optimale Auslegung eines Bauteils	300
6	Singularitäten	305
6.1	Singuläre Spannungen	305
6.2	Ein Paradox?	309
6.3	Einzelkräfte	309
6.4	Das Abklingen der Spannungen	312

6.5	Kragträger	314
6.6	Unendlich große Spannungen	315
6.7	Symmetrie der Wirkungen	317
6.8	Kragscheibe	319
6.9	Standardsituationen	324
7	Arbeits- und Energieprinzip der Flächentragwerke und Ergänzungen	327
7.1	Regeln	327
7.2	Der schubweiche Balken (Timoshenko beam)	329
7.3	Laplace Operator	330
7.4	Die Scheibengleichung	330
7.5	Die schubstarre Platte (Kirchhoff)	333
7.6	Der Kirchhoffschub	335
7.7	Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)	336
7.8	Geometrisch nichtlinearer Balken	337
7.9	Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte	339
7.10	Nichtlineare Elastizitätstheorie	339
7.11	Ergänzungen	341
7.11.1	Einzelkraft in einer Scheibe	341
7.11.2	Multipole	342
7.11.3	Die Dimension der f_i	344
7.11.4	Lokale Änderungen	345
8	Nachwort	349
	Literaturverzeichnis	357