

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Grundlagen</b>	11
1.1	Einführung	11
1.1.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	12
1.1.2	Der Satz von Betti	12
1.1.3	Einflussfunktionen	13
1.1.4	Identitäten	14
1.2	Greensche Identitäten	16
1.2.1	Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes	19
1.2.2	Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens	19
1.2.3	Durchbiegung $w$ eines Seils	19
1.2.4	Durchbiegung $w$ eines Balkens	19
1.2.5	Durchbiegung $w$ eines Balkens, Theorie II. Ordnung	20
1.2.6	Elastisch gebetteter Träger	20
1.2.7	Zugbandbrücke	21
1.3	Die Arbeitssätze der Statik	21
1.4	Ein Nullsummenspiel	23
1.5	Beispiele	24
1.5.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	24
1.5.2	Energieerhaltungssatz	26
1.5.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	26
1.6	Rahmen	29
1.7	Einzelkräfte und Einzelmomente	31
1.8	Lagersenkung	33
1.9	Federn	37
1.10	Temperatur	37
1.11	Die vollständige Arbeitsgleichung	39
1.12	Kurzform	39
1.13	Dualität	40
1.14	Mohr contra Betti	45
1.15	Schwache und starke Einflussfunktionen	47
1.16	Die kanonischen Randwerte	50
1.17	Die Reduktion der Dimension	52
1.18	Methode der Randelemente	54
1.19	Finite Elemente und Randelemente	57
1.20	Testfunktionen	58

1.21	Müssen virtuelle Verrückungen klein sein? . . . . .	59
1.22	Nur, wenn Gleichgewicht herrscht? . . . . .	59
1.23	Was ist Weg und was ist Kraft? . . . . .	60
1.24	Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen . . . . .	61
1.25	Warum das Minus in $-EA u'' = p$ ? . . . . .	62
1.26	Die virtuelle innere Energie . . . . .	63
1.27	Gleichgewicht . . . . .	63
1.28	Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt . . . . .	66
1.29	Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht . . . . .	67
1.30	Gleichgewicht am verformten Tragwerk? . . . . .	67
1.31	Quellen und Senken . . . . .	68
1.32	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie . . . . .	69
1.32.1	Minimum oder Maximum? . . . . .	71
1.32.2	Horizontale Tangente . . . . .	73
1.32.3	Wenn das Material reißt . . . . .	73
1.32.4	Wenn Lager entfallen . . . . .	74
1.33	Unendliche Energie . . . . .	77
1.34	Nichtlineare Probleme . . . . .	83
<b>2</b>	<b>Der Satz von Betti . . . . .</b>	<b>85</b>
2.1	Grundlagen . . . . .	85
2.2	Einflussfunktionen für Weggrößen . . . . .	87
2.2.1	Herleitung . . . . .	89
2.3	Einflussfunktionen für Kraftgrößen . . . . .	92
2.3.1	Einflussfunktion für $N(x)$ . . . . .	94
2.3.2	Einflussfunktion für $M(x)$ . . . . .	95
2.3.3	Die Kette der Einflussfunktionen . . . . .	97
2.3.4	Momente differenzieren die Einflussfunktionen . . . . .	99
2.3.5	Ein Rätsel . . . . .	99
2.4	Statisch bestimmte Tragwerke . . . . .	101
2.4.1	Polpläne . . . . .	103
2.4.2	Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren . . . . .	104
2.4.3	Berechnung der Verdrehungen . . . . .	105
2.4.4	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.18 . . . . .	107
2.4.5	Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.19 . . . . .	108
2.4.6	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.20 . . . . .	109
2.4.7	Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.21 . . . . .	110
2.4.8	Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.22 . . . . .	113
2.4.9	Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.23 . . . . .	113
2.4.10	Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.24 . . . . .	113
2.5	Statisch unbestimmte Tragwerke . . . . .	115
2.6	Einflussfunktionen für Lagerkräfte . . . . .	119
2.7	Die Nullstellen der Querkraft . . . . .	121
2.8	Dirac-Deltas . . . . .	122
2.9	Dirac Energie . . . . .	125

2.10	Punktwerte bei Flächentragwerken	131
2.11	Dualität	133
2.12	Monopole und Dipole	135
2.13	Einflussfunktionen für integrale Werte	140
2.14	Einflussfunktionen rechnen rückwärts	145
<b>3</b>	<b>Finite Elemente</b>	<b>147</b>
3.1	Die Idee der finiten Elemente	147
3.2	Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind	150
3.3	Addition der lokalen Lösung	154
3.4	Projektion	156
3.5	Äquivalente Knotenkräfte	157
3.6	Festhaltekräfte	159
3.7	Shape forces und der FE-Lastfall	161
3.8	Der FE-Lastfall bei Platten	169
3.9	Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen	170
3.10	Funktionale	172
3.11	Beispiele	175
3.12	Die lokale Lösung	183
3.13	Die zentrale Gleichung	186
3.14	Der Satz von Maxwell	188
3.15	Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente	189
3.16	Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung	190
3.17	Die inverse Steifigkeitsmatrix als Analysetool	192
3.18	Inhomogenes Material	195
3.19	Sensitivitätsplots	197
3.20	Die inverse Steifigkeitsmatrix	199
3.21	Beispiele	200
3.22	Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion	205
3.23	Die Lagerkräfte der FE-Lösung	206
3.24	Einflussfunktion für ein starres Lager	208
3.25	Beispiel	210
3.26	Einflussfunktion für ein federndes Lager	211
3.27	Einflussfunktion für die Kraft in einer Stütze	213
3.28	Beispiel	215
3.29	Genauigkeit der Lagerkräfte	219
3.30	Positionsstatik und 3-D Berechnung	219
3.31	Punktkräfte und Punktlager bei Scheiben	223
3.32	Punktlager sind hot spots	225
3.33	Der amputierte Dipol	226
3.34	Einzelkräfte als Knotenkräfte	232
3.35	Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen	232

<b>4</b>	<b>Betti extended</b> . . . . .	235
4.1	Herleitung . . . . .	236
4.2	In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt? . . . . .	238
4.3	Exakte Werte . . . . .	242
4.4	Eindimensionale Probleme . . . . .	243
4.5	Flächentragwerke . . . . .	245
4.6	Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied . . . . .	249
4.7	Wenn die Lösung in $V_h$ liegt . . . . .	250
4.8	Adaptive Verfeinerung . . . . .	252
4.9	Pollution . . . . .	255
4.10	Singularitäten in Einflussfunktionen . . . . .	257
<b>5</b>	<b>Steifigkeitsänderungen</b> . . . . .	263
5.1	Ein erster Versuch . . . . .	263
5.2	Zweites Beispiel . . . . .	265
5.3	Strategie . . . . .	266
5.4	Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten . . . . .	267
5.5	Dipole und Monopole . . . . .	268
5.6	Weggrößen und Kraftgrößen . . . . .	270
5.7	Das Abklingen der Effekte . . . . .	271
5.8	Die Bedeutung für die Praxis . . . . .	272
5.9	Rahmen . . . . .	274
5.10	Ausfall eines starren Lagers . . . . .	276
5.11	Das statische Gefühl . . . . .	285
5.12	Durchlaufträger . . . . .	286
5.13	Längs und quer . . . . .	289
5.14	Das Kraftgrößenverfahren . . . . .	289
5.15	Austausch als Alternative . . . . .	290
5.16	Ingenieurabschätzungen . . . . .	292
5.17	Lokale Analyse . . . . .	292
5.18	Nah und fern . . . . .	297
5.19	Zusammenfassung . . . . .	298
5.19.1	Ausfall eines starren Gelenklagers . . . . .	298
5.19.2	Ausfall einer starren Einspannung . . . . .	298
5.19.3	Änderung der Senksteifigkeit . . . . .	299
5.19.4	Änderung der Drehfedersteifigkeit . . . . .	299
5.19.5	Änderung der Längssteifigkeit in einem Stab . . . . .	299
5.19.6	Änderung der Biegesteifigkeit in einem Balken . . . . .	299
5.20	Optimale Auslegung eines Bauteils . . . . .	300
<b>6</b>	<b>Singularitäten</b> . . . . .	305
6.1	Singuläre Spannungen . . . . .	305
6.2	Ein Paradox? . . . . .	309
6.3	Einzelkräfte . . . . .	309
6.4	Das Abklingen der Spannungen . . . . .	312

6.5	Kragträger	314
6.6	Unendlich große Spannungen	315
6.7	Symmetrie der Wirkungen	317
6.8	Kragscheibe	319
6.9	Standardsituationen	324
<b>7</b>	<b>Arbeits- und Energieprinzip der Flächentragwerke und Ergänzungen</b>	<b>327</b>
7.1	Regeln	327
7.2	Der schubweiche Balken (Timoshenko beam)	329
7.3	Laplace Operator	330
7.4	Die Scheibengleichung	330
7.5	Die schubstarre Platte (Kirchhoff)	333
7.6	Der Kirchhoffschub	335
7.7	Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)	336
7.8	Geometrisch nichtlinearer Balken	337
7.9	Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte	339
7.10	Nichtlineare Elastizitätstheorie	339
7.11	Ergänzungen	341
	7.11.1 Einzelkraft in einer Scheibe	341
	7.11.2 Multipole	342
	7.11.3 Die Dimension der $f_i$	344
	7.11.4 Lokale Änderungen	345
<b>8</b>	<b>Nachwort</b>	<b>349</b>
	Literaturverzeichnis	357