

# **Finite Elemente und Einflussfunktionen**

Diplomarbeit

1. Studienstufe

im Fachbereich Bauingenieurwesen / Fachgebiet Baustatik  
der Universität Kassel

von

Daniel Materna

Kassel, im März 2002

Betreuer:

Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann

Fachbereich Bauingenieurwesen / Fachgebiet Baustatik

Universität Kassel

2. Prüfer:

Prof. Dipl.-Ing. Bernd Stolzenberg

Fachbereich Bauingenieurwesen / Fachgebiet Bauinformatik

Universität Kassel

# Erklärung

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit selbständig, nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt worden ist.

Kassel, den 07.03.2002

.....

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen .....</b>	<b>3</b>
2.1	Einflussfunktion am einfachen Balken.....	4
2.2	Der Satz von Betti .....	5
2.3	Notation .....	8
<b>3</b>	<b>Die Lösung mit finiten Elementen.....</b>	<b>10</b>
3.1	Der Verformungsraum.....	10
3.2	Der Lastfall $p_h$ .....	13
3.3	Der Projektionssatz.....	15
3.4	Genauigkeit der Einflussfunktionen .....	20
3.5	Verbesserung der Ergebnisse.....	21
<b>4</b>	<b>Berechnung von Einflussfunktionen.....</b>	<b>22</b>
4.1	Äquivalente Knotenkräfte.....	22
4.2	Knotenkräfte am Balkenelement .....	25
4.2.1	Formfunktionen .....	25
4.2.2	Einflussfunktion für das Moment .....	26
4.3	Knotenkräfte beim bilinearen Scheibenelement (Q4) .....	28

4.3.1	Vorbemerkungen .....	28
4.3.2	Formfunktionen .....	29
4.3.3	Spannungen im Element.....	32
4.3.4	Einflussfunktionen für lokale Spannungen.....	34
4.3.5	Einflussfunktionen für integrale Spannungen .....	37
4.4	Berechnung der Knotenkräfte bei anderen Elementen .....	40
<b>5</b>	<b>Implementierung in ein FE-Programm.....</b>	<b>41</b>
5.1	Programmstruktur und Berechnungsablauf.....	41
5.2	Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte .....	43
5.3	Interpretation der Ergebnisse.....	43
<b>6</b>	<b>Numerische Ergebnisse .....</b>	<b>45</b>
6.1	Wandscheibe mit verschiedenen Belastungen.....	45
6.2	Rahmen mit horizontaler Einzelkraft .....	51
6.3	Einflussfunktion für das Moment beim Kragträger.....	54
6.4	Einflussfunktion für die Querkraft beim Balken .....	56
6.5	Kragscheibe .....	58
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick .....</b>	<b>62</b>
	<b>Verzeichnis der verwendeten Symbole .....</b>	<b>64</b>
	<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>65</b>

# 1 Einleitung

Die Methode der finiten Elemente hat sich in den letzten Jahren zu einem wirkungsvollen Werkzeug für ingenieurwissenschaftliche Berechnungen entwickelt. Mit ihr können die unterschiedlichsten Probleme der Strukturmechanik numerisch gelöst werden. Umso wichtiger ist es für den Ingenieur sich mit diesem Thema auseinander zu setzen und vor allem die Schwächen der Methode zu erkennen. Besonders muss dabei betont werden, dass es ein Näherungsverfahren ist, dessen Aufwand mit der gewünschten Genauigkeit steigt. Jedoch kann der planende Ingenieur bei seiner Arbeit mit einem FE-Programm den Fehler in der FE-Lösung nicht direkt wahrnehmen. Er wird sicher bei einfachen Beispielen feststellen, dass das gefundene Ergebnis von der exakten Lösung abweicht, aber er kann nur schwer eine allgemeine Aussage über die Korrektheit einer beliebigen Weg- oder Kraftgröße machen.

Die vorliegende Arbeit soll auf dieses Defizit aufmerksam machen und ein Bewertungskriterium vorstellen, welches dem Ingenieur die Beurteilung seiner Rechenergebnisse erleichtert. Den Zugang hierzu liefern die Greenschen Funktionen (Einflussfunktionen). Mit ihnen werden in der klassischen Statik lokale und globale Weg- oder Kraftgrößen berechnet. Es soll gezeigt werden, dass bei finiten Elementen die exakte Greensche Funktion durch eine auf den FE-Ansatzraum projizierte Greensche Funktion ersetzt wird. Mit dieser werden dann alle lokalen und globalen Weg- oder Kraftgrößen berechnet.

Die Genauigkeit der Ergebnisse hängt dadurch von der Güte der genäherten Greenschen Funktion ab. Je besser das Netz diese darstellen kann, umso besser sind auch die lokalen Größen. Man erhält dadurch in vielen Fällen eine optische Kontrolle über die Korrektheit der FE-Lösung und es wird anschaulich, warum beispielsweise in der Regel das Gleichgewicht in einem Schnitt nicht erfüllt ist.

In der Standardliteratur über die Methode der finiten Elemente ist diese Thematik nicht zu finden. Es handelt sich hierbei also um ein recht neues Forschungsgebiet, welches eine neue Sichtweise für die Abschätzung von Fehlern eröffnet.

Allgemein wird dem Thema der Einflussfunktionen zu wenig Aufmerksamkeit gewidmet, obwohl die Berechnung von ihnen in vielen Bereichen der Strukturmechanik eine wichtige Rolle spielt, wie z.B. beim Entwurf einer Brücke.

Die vorliegende Arbeit gliedert sich folgt:

Zunächst werden in Kapitel 2 einige Grundlagen zu Einflussfunktionen und der verwendeten Notation angegeben. Dazu wird der Satz von Betti hergeleitet, welcher den theoretischen Hintergrund zu Einflussfunktionen bildet.

In Kapitel 3 soll dann gezeigt werden, dass sich bei der Berechnung mit finiten Elementen jede Weg- und Kraftgröße aus der Überlagerung der genäherten Greenschen Funktion mit der Belastung berechnen lässt. Des Weiteren werden Fragestellungen zur Genauigkeit der Einflussfunktionen und zur Verbesserung der Ergebnisse erläutert.

Anschließend wird dann in Kapitel 4 die Vorgehensweise zur Berechnung von Einflussfunktionen mit finiten Elementen vorgestellt. Im Einzelnen werden dabei das Balkenelement sowie das bilineare Scheibenelement behandelt.

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die Berechnung von Greenschen Funktionen in ein FE-Programm implementiert. In Kapitel 5 wird deshalb kurz auf dieses Programm eingegangen.

Des Weiteren soll in Kapitel 6 anhand einiger Rechenbeispiele die hier vorgestellte Methode veranschaulicht werden.

In Kapitel 7 erfolgen dann abschließend eine Zusammenfassung und ein kurzer Ausblick.

## 2 Grundlagen

Das grundlegende Ziel der Statik ist es, die maßgebenden Beanspruchungen eines Tragwerks zu bestimmen und mit diesen einen Tragfähigkeitsnachweis zu führen. Es werden die maximalen Beanspruchungen den zulässigen Beanspruchungen gegenübergestellt und miteinander verglichen. Bei ortsgebundenen Lasten, wie z.B. Eigenlasten, Auflasten, Schneelasten oder Installationen, genügt es, die Schnittkraftflächen zu bestimmen und aus ihnen die Maximalwerte abzulesen. Anders verhält es sich bei beweglichen Lasten, wie z.B. Straßenfahrzeugen, Eisenbahnen oder Kranen. Bei diesen Lastfällen müssen zuerst die ungünstigsten Laststellungen gefunden werden, aus welchen dann schließlich die maximalen Beanspruchungen resultieren.

Für diese Aufgabenstellung bedient man sich der Einflussfunktionen. Sie beschreiben den Einfluss einer Einheitslastgröße mit variablem Angriffspunkt  $y$  auf eine Zustandsgröße  $Z$  in einem bestimmten Punkt  $x$  des gegebenen Systems.

Die wandernde Einheitslastgröße kann prinzipiell eine beliebig gerichtete Kraft oder auch ein Moment sein. Die Last wandert über den so genannten Lastgurt, welcher als Weg der Wanderlast zu verstehen ist.

Mit Hilfe von Einflussfunktionen lässt sich jede Weg- oder Kraftgröße berechnen. Ist z.B. der Maximalwert einer Kraftgröße zu ermitteln, so muss man die Einflussfunktion für die gesuchte Kraftgröße bestimmen und kann dann aus dieser die ungünstigste Laststellung ablesen. Des Weiteren erhält man für jede Laststellung den jeweiligen Wert der Kraftgröße.



## 2.1 Einflussfunktion am einfachen Balken

An einem einfachen Beispiel soll nun der Charakter einer Einflussfunktion untersucht werden. Es ist dazu die Einflussfunktion einer Auflagerkraft zu ermitteln.

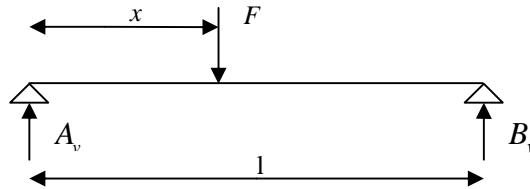


Abb. 2.1 System mit Wanderlast

Die Auflagerkraft  $A_v$  in Abb. 2.1 ergibt sich aus der Summe der Momente um B wie folgt:

$$A_v = \frac{l-x}{l} \cdot F = F \cdot \left(1 - \frac{x}{l}\right) \quad (2.1)$$

Dieses Ergebnis zeigt, dass wenn die Kraft  $F$  direkt über dem Lager B steht keine Auflagerkraft  $A_v$  entsteht. Wenn umgekehrt die Last direkt über A steht, wird  $A_v = F$ . Für alle Zwischenwerte wird sich der Einfluss der Last linear verändern.

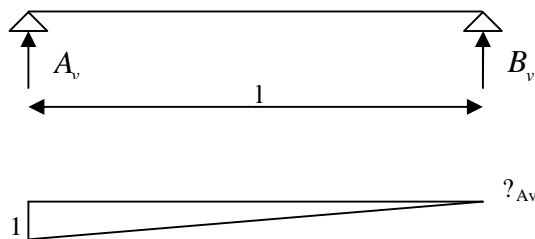


Abb. 2.2 Einflussfunktion für  $A_v$

Der rechte Teil der Gleichung (2.1) ist eine Geradengleichung und wird diese mit  $h_{A_v}$  bezeichnet, erhält man den Ausdruck

$$A_v = h_{A_v} \cdot F, \quad (2.2)$$

$$\text{mit } h_{A_v} = \left(1 - \frac{x}{l}\right).$$

In der Gleichung (2.2) stellt  $\mathbf{h}_{A_v}$  gerade die Verschiebungsfigur des Balkens dar, die entsteht, wenn man das Lager A um Eins absenkt, siehe Abb. 2.2. In unserem Fall verläuft die Biegelinie linear, da das System statisch bestimmt ist und sich der Balken bei einer Lagersenkung zwangungsfrei absenken kann.

Man hätte also die Einflussfunktion in diesem Fall auch leicht durch eine kinematische Methode bestimmen können. Die Auflagerkraft ergibt sich für eine beliebige Laststellung aus dem Produkt der Verformung an der Stelle  $x$  in Krafrichtung und der Last an der Stelle  $x$ .

Für den Fall einer Streckenlast  $p$  über den gesamten Balken muss folgende Integration vorgenommen werden:

$$A_v = \int_0^l \mathbf{h}_{A_v}(x) \cdot p(x) dx. \quad (2.3)$$

Einflussfunktionen sind also Biegelinien, die entstehen, wenn man die zur gesuchten Kraftgröße komplementäre Weggröße oder die zur gesuchten Weggröße komplementäre Kraftgröße aufbringt.

## 2.2 Der Satz von Betti

Im vorangegangenen Beispiel wurde die Einflussfunktion allein durch Gleichgewichtsbetrachtungen bestimmt. Der Satz von Betti liefert nun einen allgemeinen Zugang zu Einflussfunktionen.

Wenn wir einen Balken mit konstanter Biegesteifigkeit betrachten, dann genügt die Durchbiegung  $w$  der Differentialgleichung

$$EIw^{IV} = p.$$

Zwängt man dem Balken nun eine virtuelle Verrückung  $\hat{w}$  auf, dann ergibt die virtuelle äußere Arbeit der Belastung  $p$  auf virtuellen Wegen  $\hat{w}$  das Integral

$$\int_0^l EIw^{IV}(x) \cdot \hat{w}(x) dx.$$

Nach zweimaliger partieller Integration folgt:

$$\int_0^l EIw^{IV} \hat{w} dx = [-EIw''' \hat{w} + EIw'' \hat{w}']_0^l + \int_0^l EIw'' \hat{w}'' dx.$$

Mit  $EIw^{IV} = p$ ,  $-EIw''' = Q$  und  $-EIw'' = M$  ergibt sich

$$G(w, \hat{w}) = \underbrace{\int_0^l p \hat{w} dx + [Q \hat{w} - M \hat{w}']_0^l}_{\text{äußere virtuelle Arbeit}} - \underbrace{\int_0^l \frac{MM}{EI} dx}_{\text{innere virtuelle Arbeit}} = 0 \quad (2.4)$$

$$\forall w \in C^4, \hat{w} \in C^2.$$

Gleichung (2.4) bezeichnet man als die 1. Greensche Identität und sie ist die mathematische Formulierung des Prinzips der virtuellen Verrückungen.

Werden nun  $w$  und  $\hat{w}$  vertauscht, dann erhält man das Prinzip der virtuellen Kräfte. Es folgt mit  $EI\hat{w}^{IV} = \hat{p}$ ,  $-EI\hat{w}''' = \hat{Q}$  und  $-EI\hat{w}'' = \hat{M}$

$$G(\hat{w}, w) = \int_0^l \hat{p} w dx + [\hat{Q} w - \hat{M} w']_0^l - \int_0^l \frac{\hat{M} M}{EI} dx = 0 \quad (2.5)$$

$$\forall \hat{w} \in C^4, w \in C^2.$$

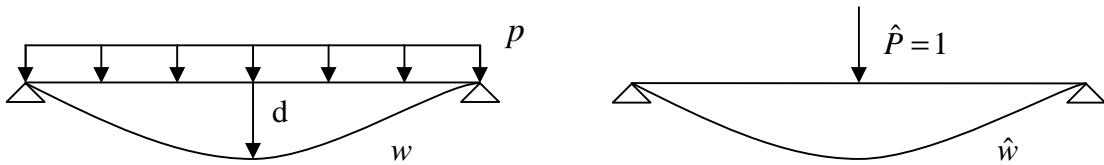
Nach Subtraktion der beiden Identitäten erhält man die 2. Greensche Identität, den Satz von Betti.

$$B(w, \hat{w}) = G(w, \hat{w}) - G(\hat{w}, w) = 0$$

$$B(w, \hat{w}) = \int_0^l p \hat{w} dx + [Q \hat{w} - M \hat{w}']_0^l - \int_0^l \hat{p} w dx - [\hat{Q} w - \hat{M} w']_0^l = 0 \quad (2.6)$$

Der Satz von Betti wird auch als Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungsarbeit bezeichnet. Man kann ihn für die unterschiedlichsten Differentialgleichungen formulieren, wobei die Vorgehensweise prinzipiell der hier gezeigten entspricht.

Es soll nun wieder am Beispiel des Balkens die Durchbiegung in Feldmitte mit Hilfe des Satzes von Betti ermittelt werden.



**Abb. 2.3** Ausgangssystem(links) und Ersatzsystem(rechts)

Verbal formuliert lautet der Satz von Betti für dieses Beispiel: Die Arbeit, die die Einzelkraft auf dem Weg  $d$  leistet, ist gleich der Arbeit, die die Gleichlast  $p$  auf den Wegen von  $\hat{w}$  leistet. Dabei ist  $\hat{w}$  die Biegelinie im Ersatzsystem infolge  $\hat{P}=1$ . Wird die virtuelle Ver-rückung auf das Ausgangssystem mit den gleichen Lagerbedingungen aufgebracht, dann ergeben sich die Randarbeiten  $Q\hat{w}$ ,  $M\hat{w}'$ ,  $\hat{Q}w$  und  $\hat{M}w'$  zu Null, da entweder die Kraftgröße oder die korrespondierende Weggröße Null ist. Die Last  $\hat{p}$  ist in diesem Fall die Einzellast  $\hat{P}=1$  und  $w$  ist die gesuchte Durchbiegung  $d$ . Nach Einsetzen in Gleichung (2.6) ergibt sich

$$B(w, \hat{w}) = \int_0^l p \hat{w} dy - \hat{P} \cdot d = 0$$

$$1 \cdot d = \int_0^l p \hat{w} dy. \quad (2.7)$$

Da  $\hat{w}$  eine Greensche Funktion ist, bezeichnen wir es mit  $G_0(y, x)$ , wobei der erste Index  $y$  den Ort bezeichnet, an dem die Kraft steht und der zweite Index  $x$  die Laufvariable. Der untere Index  $0$  verweist auf eine Einzelkraft, d.h. es handelt sich um die Greensche Funktion für die Durchbiegung  $w$  im Punkt  $x$  infolge einer Einzelkraft.

Die Durchbiegung an einer beliebigen Stelle  $x$  ergibt sich damit zu

$$\boxed{w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy}. \quad (2.8)$$

Diese Gleichung spielt eine zentrale Rolle, da sie für die ganze lineare Statik gilt und nicht nur für das gezeigte Beispiel.

Man kann also eine Weg- oder Kraftgröße durch die Überlagerung der zugehörigen Green-schen Funktion mit der Belastung berechnen.

Die Form der Gleichung (2.8) bleibt dabei erhalten, aber es ändert sich der Kern  $G_i(y, x)$ . Der Index  $i$  gibt dabei an, um welche duale Größe es sich handelt. Beim Balken ergeben sich daher vier verschiedene Möglichkeiten.

Weg- oder Kraftgröße	Index	Duale Größe
$w$	0	Einzelkraft
$w'$	1	Moment
$M$	2	Knick
$V$	3	Versatz

**Tabelle 2.1** Duale Größen für Einflussfunktionen von Balken

Will man z.B. die Querkraft an der Stelle  $x$  berechnen, dann erhält man diese durch die Überlagerung der zugehörigen Greenschen Funktion, also aus der Biegelinie infolge eines Versatzes, mit der Belastung.

$$V(x) = \int_0^l G_3(y, x) p(y) dy$$

## 2.3 Notation

An dieser Stelle soll nun eine mathematisch orientierte Notation eingeführt werden, welche in den nachfolgenden Kapiteln benutzt wird. Das Integral zweier Funktionen  $u$  und  $v$  der Form

$$\int_0^l u(x)v(x)dx \tag{2.9}$$

nennt man das  $L_2$ -Skalarprodukt von  $u$  und  $v$ . Man kann es vereinfacht auch wie folgt schreiben:

$$(u, v) := \int_0^l u(x)v(x)dx.$$

Das  $L$  steht dabei zu Ehren des französischen Mathematikers *Lebesgue*. Die Gleichung (2.9) ist jedoch nur dann ein  $L_2$ -Skalarprodukt, wenn

$$(u, u) < \infty \text{ und } (v, v) < \infty.$$

Der Ausdruck  $(\cdot, \cdot)$  ist eine symmetrische Linearform, d.h. es gilt für beliebige Funktionen  $u$ ,  $v$ ,  $w$  und zwei Konstanten  $c_1$ ,  $c_2$ :

Symmetrie:

$$(u, v) = (v, u)$$

Linearität:

$$(c_1 u + c_2 v, w) = c_1 (u, w) + c_2 (v, w) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Definitheit:

$$(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

Des Weiteren wird z.B. beim Balken die virtuelle innere Arbeit definiert, als die Überlagerung der Momente, bzw. als Wechselwirkungsenergie zwischen zwei Biegelinien  $w$  und  $\hat{w}$

$$dA_i = \int_0^l EI w'' \hat{w}'' dx = \int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} dx.$$

Dieses kann man wieder verkürzt schreiben mit  $a(w, \hat{w})$  und erhält

$$a(w, \hat{w}) := \int_0^l EI w'' \hat{w}'' dx = \int_0^l \frac{M \hat{M}}{EI} dx.$$

Dieser Ausdruck ist eine symmetrische Bilinearform und es gelten die gleichen Eigenschaften wie oben:

Symmetrie:

$$a(u, v) = a(v, u)$$

Bilinearität:

$$a(c_1 u + c_2 v, w) = c_1 a(u, w) + c_2 a(v, w) \quad \forall c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Definitheit:

$$a(u, u) > 0 \quad \forall u \neq 0$$

## 3 Die Lösung mit finiten Elementen

In diesem Kapitel wird auf eine bemerkenswerte Eigenschaft der finiten Elemente hingewiesen, vgl. [2], [3]. Es soll gezeigt werden, dass die finiten Elemente zur Berechnung jeder lokalen und globalen Weg- oder Kraftgröße anstelle der exakten Greenschen Funktion eine auf den FE-Ansatzraum projizierte Greensche Funktion verwenden. Die projizierte Greensche Funktion ist die FE-Lösung der echten Greenschen Funktion und in der Regel nur eine Näherung.

Einführend soll noch einmal auf einige wichtige Eigenschaften der Methode der finiten Elemente eingegangen werden, welche für das Thema der Einflussfunktionen besonders wertvoll erscheinen und die den Näherungscharakter der Methode anschaulich zeigen. Dabei soll nicht die Theorie der finiten Elemente herausgearbeitet werden, da dieses in der Literatur bereits hinreichend dargestellt ist.

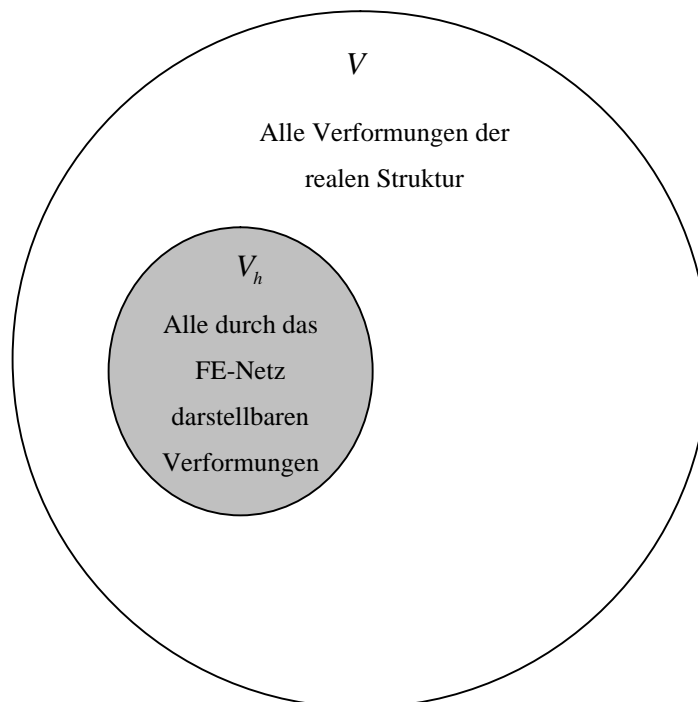
### 3.1 Der Verformungsraum

Einfache Strukturen, wie z.B. Balken oder einfache Scheiben, lassen sich ausgehend von der Differentialgleichung analytisch lösen. Für sie existiert eine exakte Lösung. Die Differentialgleichung wird für ein idealisiertes System aufgestellt und gelöst. Als Lösung erhält man eine Funktion einer charakteristischen Größe, wie z.B. der Verformung. Durch Ableitung der Funktion können weitere gewünschte Ergebnisse, wie z.B. die Spannungen, ermittelt werden.

Bei komplexen Strukturen ist es nicht mehr möglich die exakte Lösung der Differentialgleichung, die alle Randbedingungen erfüllt, zu ermitteln. Es müssen numerische Verfahren angewandt werden, um Aussagen über die Antwort des Systems machen zu können. Ein solches Verfahren zur Berechnung der unterschiedlichsten Probleme ist die Methode der finiten Elemente.

Bei einer FE-Berechnung wird dabei die reale Struktur mit unendlich vielen Freiheitsgraden und damit auch unendlich vielen Verformungsfiguren durch finite Elemente abgebildet. Die Anzahl der Elemente ist dabei endlich und folglich auch die Anzahl der möglichen Verformungsfiguren. Diese Idealisierung ist notwendig, um komplexe Strukturen berechnen zu können. Ansonsten hätte man Gleichungssysteme mit unendlich vielen Unbekannten zu lösen.

Die Güte einer Verformungsfigur hängt deshalb von der Anzahl der Elemente sowie von dem verwendeten Elementansatz ab. Mit Elementansatz ist hierbei gemeint, welche Verformungen das einzelne Element darstellen kann, also ob sich lineare, quadratische, kubische etc. Verformungszustände abbilden lassen. Je höher dabei der Ansatz ist, umso besser kann das FE-Programm die Verformungsfigur darstellen. Dennoch bleibt diese Verformungsfigur in der Regel nur eine Näherung.



**Abb. 3.1** Verformungsraum



Wenn nun der Verformungsraum  $V$  alle unendlich vielen Verformungsfiguren der realen Struktur enthält, dann existiert ein Verformungsraum  $V_h$ , welcher alle durch das FE-Netz darstellbaren Verformungsfiguren enthält. Diese Verformungen setzen sich aus stückweisen Polynomen  $\mathbf{j}_i$  zusammen, die die Knoteneinheitsverformungen repräsentieren. Der Raum  $V_h$  ist dabei eine Teilmenge von  $V$ , siehe Abb. 3.1. Der Index  $h$  steht hierbei und im Folgenden immer für die FE-Lösung.

Die Tatsache, dass das FE-Programm nur eine genäherte Verformungsfigur darstellen kann, zeigt im Grunde schon anschaulich den Fehler einer FE-Berechnung.

Einflussfunktionen sind auch Verformungsfiguren und ist das Netz diese nur näherungsweise darzustellen imstande, dann können die Ergebnisse auch nur Näherungen sein.

Die Durchbiegung  $w$  lässt sich aus dem Skalarprodukt der Greenschen Funktion und der Belastung berechnen.

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy$$

Wie später noch bewiesen wird, erhält man bei der Lösung mit finiten Elementen die Näherung der Durchbiegung  $w_h$  aus dem Skalarprodukt der genäherten Greenschen Funktion  $G_0^h$  mit der Belastung

$$w_h(x) = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy. \quad (3.1)$$

Der Fehler  $e$  ergibt sich demnach zu

$$e = w(x) - w_h(x) = \int_0^l (G_0(y, x) - G_0^h(y, x)) p(y) dy.$$

Das Ergebnis zeigt deutlich: Je besser das Netz die Greensche Funktion darstellen kann, also je kleiner der Abstand zwischen der exakten Greenschen Funktion und der genäherten Greenschen Funktion ist, umso besser sind lokale Größen des FE-Programms.

### 3.2 Der Lastfall $p_h$

Ein weiterer wichtiger Aspekt bei einer FE-Berechnung besteht in der falschen Lastannahme. Damit ist gemeint, dass das Programm den wahren Lastfall  $p$  durch einen arbeitsäquivalenten Lastfall  $p_h$  ersetzt. Diesen Ersatzlastfall löst das Programm dann exakt. Wenn man z.B. einen Balken betrachtet, welcher der Differentialgleichung  $EIw^{IV} = p$  genügt, so lautet die 1. Greensche Identität, siehe Kapitel 2.2,

$$G(w, \hat{w}) = \int_0^l p \hat{w} \, dx + [Q\hat{w} - M\hat{w}']_0^l - \int_0^l \frac{M\hat{M}}{EI} \, dx = 0.$$

Man zwingt dem Balken eine virtuelle Verrückung  $\hat{w}$  auf. Wird die virtuelle Verrückung auf das Ausgangssystem mit den gleichen Lagerbedingungen aufgebracht, dann ergeben sich die Randarbeiten  $Q\hat{w}$  und  $M\hat{w}'$  zu Null, da entweder die Kraftgröße oder die korrespondierende Weggröße Null ist. Man erhält

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad \forall \hat{w} \in V. \quad (3.2)$$

Die Gleichung (3.2) gilt also für alle exakten Biegelinien aus dem Verformungsraum  $V$ . Wird nun einer Biegelinie  $w_h$ , also einer Biegelinie aus  $V_h$  eine virtuelle Verrückung  $\hat{w}_h$  aufgezwungen, dann erhält man die FE-Lösung der obigen Gleichung

$$a(w_h, \hat{w}_h) = (p, \hat{w}_h) \quad \forall \hat{w}_h \in V_h. \quad (3.3)$$

Der Lastfall  $p_h$  wird vom FE-Programm exakt gelöst. Die exakte Lösung ist in diesem Fall die Biegelinie  $w_h$ . Man kann deshalb die Differentialgleichung symbolisch auch folgendermaßen schreiben:

$$EIw_h^{IV} = p_h. \quad (3.4)$$

Die 1. Greensche Identität für Gleichung (3.4) lautet

$$a(w_h, \hat{w}_h) = (p_h, \hat{w}_h) \quad \forall \hat{w}_h \in V_h. \quad (3.5)$$

Die linken Seiten der Gleichungen (3.3) und (3.5) sind identisch. Werden diese nun gleichgesetzt und  $\hat{w}_h$  durch die Knoteneinheitsverformungen  $\mathbf{j}_i$  ersetzt, da diese virtuelle Verrückungen aus  $V_h$  sind, dann ergibt sich

$$\boxed{(p_h, \mathbf{j}_i) = (p, \mathbf{j}_i)} \quad (3.6)$$

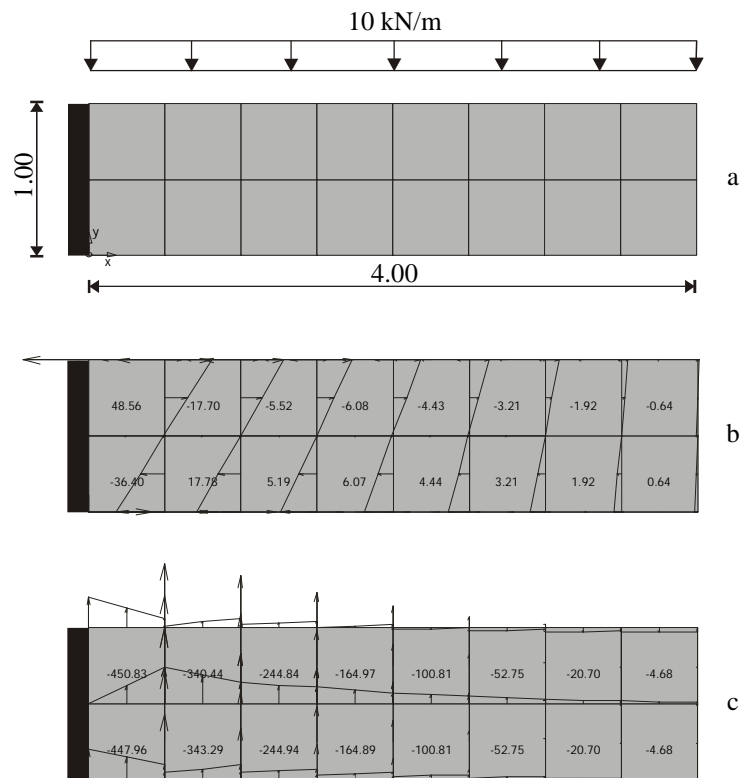
$$\forall \mathbf{j}_i \in V_h.$$

Die Arbeiten, die der Lastfall  $p_h$  auf den Wegen von  $\mathbf{j}_i$  leistet, ist gleich der Arbeit, die der wahre Lastfall  $p$  auf den Wegen von  $\mathbf{j}_i$  leistet. Die beiden Lastfälle sind arbeitsäquivalent bezüglich der Knoteneinheitsverformungen  $\mathbf{j}_i$ . Man wählt dabei keine beliebigen virtuellen Verrückungen, sondern nur solche, die in  $V_h$  liegen.

Das FE-Programm löst somit eigentlich einen anderen Lastfall, diesen jedoch exakt. In den meisten Programmen wird der Lastfall  $p_h$  nicht ausgegeben, da es leicht zu Fehlinterpretationen kommen kann. Bei einer FE-Berechnung wird er folgendermaßen ermittelt:

Die äußere Belastung wird durch äquivalente Knotenkräfte ersetzt. Dieser Lastfall wird gelöst und es werden die unbekanntenen Knotenverschiebungen der Struktur berechnet. Mit diesen Verschiebungen kann auf die Spannungen und Schnittgrößen im Element geschlossen werden. Aus diesen lässt sich dann ein Lastfall ableiten, der diesen Zustand verursacht. Das ist der eigentlich gelöste Lastfall  $p_h$ .

Beim Balken entsprechen die Kräfte aus dem Lastfall  $p_h$  den äquivalenten Knotenkräften. Es sind Einzelkräfte und Momente an den Elementknoten. Anders verhält es sich bei anderen Strukturen. In Abb. 3.2 ist der wahre Lastfall  $p$  und der FE-Lastfall  $p_h$  für eine Kragsscheibe dargestellt. Der Lastfall  $p_h$  setzt sich hier aus Element- und Kantenlasten zusammen.



**Abb. 3.2** Kragsscheibe a) System und der wahre Lastfall  $p$ , b) die horizontalen Anteile des Lastfalls  $p_h$ , c) die vertikalen Anteile des Lastfalls  $p_h$

### 3.3 Der Projektionssatz

Es soll nun gezeigt werden, dass sich eine Weg- oder Kraftgröße aus dem Skalarprodukt der genäherten Greenschen Funktion und der Belastung berechnen lässt. Die genäherte Greensche Funktion ist dabei eine Projektion der echten Greenschen Funktion auf den FE-Ansatzraum  $V_h$ . Die Projektion ist die FE-Lösung der echten Greenschen Funktion. Dabei soll der Einfachheit halber wieder ein Balken betrachtet werden.

Ein Balken, siehe Abb. 3.3, mit konstanter Biegesteifigkeit genügt der Differentialgleichung

$$EIw^{IV} = p. \quad (3.7)$$

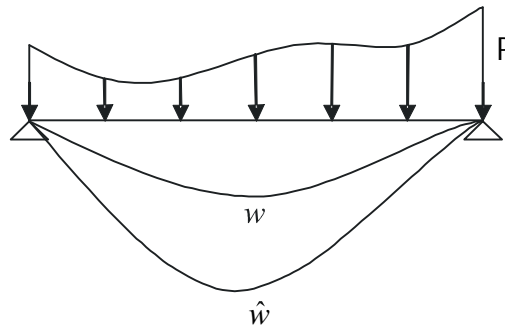


Abb. 3.3 System mit Belastung

Die 1. Greensche Identität hierfür lautet, vgl. Kapitel 3.2,

$$a(w, \hat{w}) = (p, \hat{w}) \quad (3.8)$$

$$\forall \hat{w} \in V .$$

Wird der Balken nun mit finiten Elementen abgebildet, dann ergibt sich die FE-Lösung,

$$a(w_h, \hat{w}_h) = (p, \hat{w}_h) \quad (3.9)$$

$$\forall \hat{w}_h \in V_h .$$

Da eine Greensche Funktion  $G_i$  auch eine mögliche Biegelinie aus  $V$  ist, kann man in der Gleichung (3.7) für  $w$  auch  $G_i$  einsetzen und die Belastung  $p$  durch die zu  $G_i$  duale Belastung  $\mathbf{d}_i$  ersetzen.

$$EI G_i^{IV} = \mathbf{d}_i \quad (3.10)$$

Jetzt ist  $G_i$  die Biegelinie infolge der Belastung  $\mathbf{d}_i$ . Der Index  $i$  gibt dabei an, um welche duale Belastung es sich handelt.

Wenn man analog zu oben dem Balken eine virtuelle Verrückung  $\hat{w}$  aufzwingt und zweimal partiell integriert, so ergibt sich

$$a(G_i, \hat{w}) = a(\mathbf{d}_i, \hat{w}) \quad (3.11)$$

$$\forall \hat{w} \in V .$$

Die Gleichung (3.11) entspricht formal der Gleichung (3.8) und auch zu ihr existiert eine FE-Lösung. Man ersetzt dabei  $G_i$  durch die genäherte Greensche Funktion  $G_i^h$  und  $\hat{w}$  durch  $\hat{w}_h$ , vgl. Gleichung (3.9),

$$a(G_i^h, \hat{w}_h) = (\mathbf{d}_i, \hat{w}_h) \quad (3.12)$$

$$\forall \hat{w}_h \in V_h.$$

Des Weiteren kann man in Gleichung (3.9)  $\hat{w}_h$  durch  $G_i^h$  ersetzen, da  $G_i^h$  hierbei eine mögliche Testfunktion (virtuelle Verrückung) darstellt und diese auch in  $V_h$  enthalten ist. Nach dieser Ersetzung erhält man

$$\boxed{a(w_h, G_i^h) = (p, G_i^h)}. \quad (3.13)$$

In diesem Fall ist  $G_i^h$  die virtuelle Verrückung und  $w_h$  ist die FE-Lösung des Lastfalls  $p$ .

Nun kann in der Gleichung (3.12) das  $\hat{w}_h$  durch  $w_h$  ersetzt werden, da  $w_h$  auch eine mögliche virtuelle Verrückung ist. Aufgrund der Symmetrieeigenschaft  $a(u, v) = a(v, u)$ , können die Terme der linken Seite vertauscht werden und man erhält

$$\boxed{a(w_h, G_i^h) = (\mathbf{d}_i, w_h)}. \quad (3.14)$$

In diesem Fall wird  $w_h$  zur virtuellen Verrückung und  $G_i^h$  ist die FE-Lösung des Lastfalls  $\mathbf{d}_i$ .

Es zeigt sich, dass die linken Seiten der Gleichungen (3.13) und (3.14) identisch sind. Nach Gleichsetzen ergibt sich

$$\boxed{(\mathbf{d}_i, w_h) = (p, G_i^h)}. \quad (3.15)$$

Der Index  $i$  gibt dabei an, um welche duale Größe  $\mathbf{d}_i$  es sich handelt. Im Falle des Balkens verweist der Index  $0$  auf eine Einzelkraft  $P=1$  an der Stelle  $x$ , welche die Biegelinie  $G_0$ , also die Einflussfunktion für die Durchbiegung  $w$  im Punkt  $x$ , verursacht. Der Index  $1$  steht für ein Einzelmoment  $M=1$ , welches uns die Einflussfunktion für  $w'$  liefert. Um die Einfluss-

funktion für das Moment zu erhalten, muss man einen Knick  $\Delta w' = 1$  erzeugen und für die Querkraft  $V$  einen Versatz  $\Delta w = 1$ , siehe Abb. 3.4.

Um diese dualen Größen zu beschreiben wird der Operator  $\partial^i w_h$  eingeführt,

$$(\mathbf{d}_i, w_h) := \partial^i w_h$$

mit  $\partial^0 w_h = w_h$   $\partial^1 w_h = w_h'$   $\partial^2 w_h = M_h$   $\partial^3 w_h = V_h$ .

Wird die Gleichung (3.15) nun vollständig ausgeschrieben, erhält man das gewünschte Ergebnis

$$\partial^i w_h = \int_0^l p(y) G_i^h(y, x) dy. \quad (3.16)$$

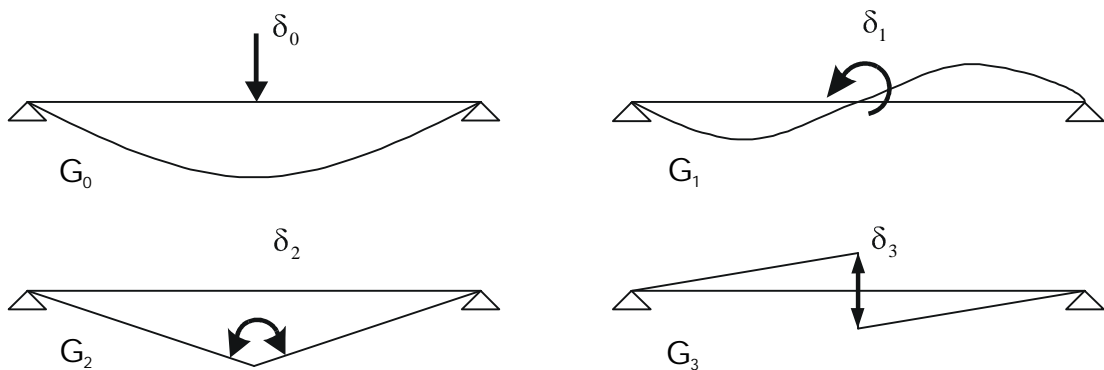


Abb. 3.4 Greensche Funktionen beim Balken

Es ergeben sich daher für den Balken die folgenden Gleichungen:

Für  $i = 0$   $(\mathbf{d}_0, w_h) := w_h(x) = \int_0^l p(y) G_0^h(y, x) dy.$

Für  $i = 1$   $(\mathbf{d}_1, w_h) := w_h'(x) = \int_0^l p(y) G_1^h(y, x) dy.$

Für  $i = 2$   $(\mathbf{d}_2, w_h) := M_h(x) = \int_0^l p(y) G_2^h(y, x) dy.$

Für  $i = 3$   $(\mathbf{d}_3, w_h) := V_h(x) = \int_0^l p(y) G_3^h(y, x) dy.$

Wie das Ergebnis zeigt, lässt sich jede Weg- oder Kraftgröße des Balkens aus dem Skalarprodukt der zugehörigen genäherten Greenschen Funktion und der Belastung berechnen. Das hier am Beispiel des Balkens gezeigte, gilt natürlich auch für andere Strukturen, wie Stäbe, Scheiben oder Platten. Der Vollständigkeit halber werden die entsprechenden Größen in den folgenden Tabellen aufgelistet.

**Kirchhoff-Platte:**

Weg- oder Kraftgröße	Index	duale Größe
$w$	0	Einzelkraft
$w_{,x}, w_{,y}$	1	Moment
$m_{xx}, m_{yy}, m_{xy}$	2	Knick
$q_x, q_y$	3	Versatz

**Tabelle 3.1** Duale Größen für Einflussfunktionen von schubstarrten Platten

**Scheiben:**

Weg- oder Kraftgröße	Index	duale Größe
$u_x, u_y$	0	Einzelkraft
$s_{xx}, s_{xy}, s_{yy}$	1	Versatz

**Tabelle 3.2** Duale Größen für Einflussfunktionen von Scheiben

**Stab:**

Weg- oder Kraftgröße	Index	duale Größe
$u$	0	Einzelkraft
$N$	1	Versatz

**Tabelle 3.3** Duale Größen für Einflussfunktionen von Stäben

So ist es möglich, z.B. die Spannung eines Punktes  $x$  einer Scheibe zu berechnen, indem die zugehörige Greensche Funktion, also die Verformungsfigur infolge eines Versatzes an der Stelle  $x$ , mit der Belastung überlagert wird.

$$\mathbf{s}_{xx}^h(x) = \int_{\Omega} G_1^h(y, x) p(y) d\Omega_y$$

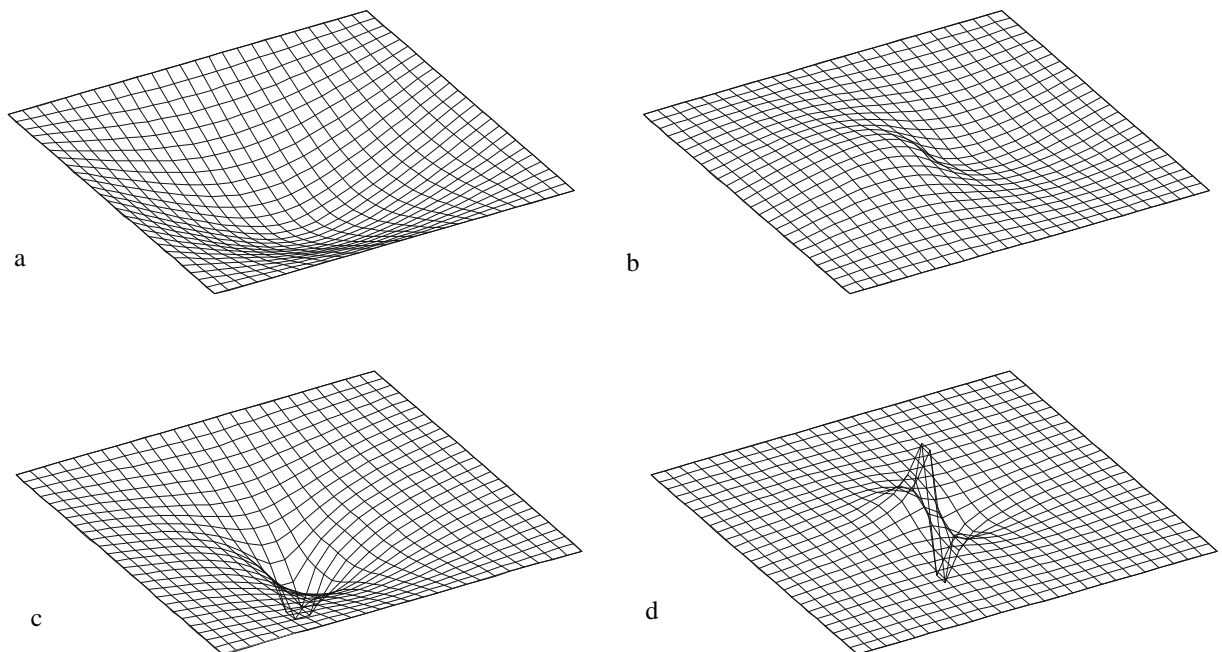


### 3.4 Genauigkeit der Einflussfunktionen

Da sich jede Weg- oder Kraftgröße mit Hilfe der genäherten Einflussfunktion berechnen lässt, hängt also die Genauigkeit einer FE-Lösung davon ab, wie gut das Netz die Einflussfunktion annähern kann. Der Fehler ergibt sich daher aus dem Abstand zwischen der exakten und der genäherten Einflussfunktion. Für den Fall einer Einflussfunktion für die Querkraft in einer Platte ergibt sich damit der Fehler zu

$$e = q_x(x) - q_x^h(x) = \int_{\Omega} [G_3(y, x) - G_3^h(y, x)] p(y) d\Omega_y. \quad (3.17)$$

Bei einer Einflussfunktion für die Querkraft muss das Netz einen Versatz von Eins erzeugen. Es ist anschaulich klar, dass dieser dem Netz größere Schwierigkeiten bereitet als beispielsweise die Biegefläche einer Einzelkraft darzustellen. Die Einzelkraft ist ja gerade die duale Größe zur Erzeugung der Einflussfunktion für die Durchbiegung. Die zu erzeugenden Biegeflächen werden also immer komplexer, je höher die Ableitungen sind, siehe Abb. 3.5. Demnach nimmt auch die Genauigkeit mit Höhe der Ableitung ab, da es dem Netz immer schwerer fällt, die Einflussfunktion anzunähern.



**Abb. 3.5** Einflussfunktionen in Plattmitte a) für die Durchbiegung  $w$ , b) für die Verdrehung  $w_{,x}$ , c) für das Moment  $m_{xx}$ , d) für die Querkraft  $q_x$  [Quelle: [3] S.69]

### 3.5 Verbesserung der Ergebnisse

Um bei FE-Berechnungen den Fehler in der Lösung zu minimieren, bedient man sich so genannter adaptiver Verfahren. Eine Fehlerminimierung wird dadurch erreicht, in dem an den Stellen wo die Fehlerkräfte am größten sind, das Netz verfeinert oder der Grad der Ansatzfunktionen erhöht wird. Die Fehlerkräfte sind hierbei die Differenzen aus dem Lastfall  $p$  und  $p_h$ , welche eigentlich Null sein müssten.

Das Verfahren bei dem das Netz verfeinert wird, nennt man die h-Methode, die Erhöhung des Ansatzgrades bezeichnet man als p-Methode. Es gibt auch eine Mischung aus beiden Methoden, die so genannte hp-Methode. Bei ihr kommen beide Verfahren zum Einsatz. In der Anwendung hat sich diese Methode als sehr effektiv erwiesen. Des Weiteren existieren noch einige andere Methoden, auf die an dieser Stelle aber auch nicht weiter eingegangen werden soll.

Viel wichtiger für das Thema der Einflussfunktionen ist eine Technik, welche gezielt den Abstand zwischen der exakten und genäherten Einflussfunktion verringert. Man spricht hierbei von Dualitätstechniken, da man zur Erzeugung einer Greenschen Funktion eine zu der gesuchten Größe duale Belastung aufbringt.

Bei dieser Technik versucht man den Fehler in der Greenschen Funktion zu minimieren. Anschaulich ausgedrückt bedeutet dies, dass z.B. für den Fall einer Einflussfunktion für ein Moment in einer Platte, nur die Bereiche der Platte verfeinert werden, an denen das Netz Schwierigkeiten hat die Einflussfunktion darzustellen. Je kleiner dadurch der Abstand zwischen der exakten und der genäherten Greenschen Funktion wird, umso kleiner ist der Fehler.

$$e = m_{xx}(x) - m_{xx}^h(x) = \int_{\Omega} [G_2(y, x) - G_2^h(y, x)] p(y) d\Omega_y$$

Die Methode eignet sich jedoch vorwiegend nur zur Bestimmung einzelner Werte, bei denen hohe Genauigkeit gefordert wird.

## 4 Berechnung von Einflussfunktionen

Im vorangegangenen Kapitel wurde gezeigt, dass sich in einem FE-Programm Weg- und Kraftgrößen mit Hilfe von Einflussfunktionen berechnen lassen. Die zentrale Frage ist deshalb, wie man in einem FE-Programm Einflussfunktionen erzeugen kann. Wird z.B. die Greensche Funktion für eine Spannung in einem Punkt  $x$  einer Scheibe gesucht, dann muss die Scheibe an der Stelle  $x$  in die jeweilige Richtung um Eins auseinandergedrückt werden. Um nun diesen Versatz von Eins zu erzeugen, müssen bestimmte Knotenkräfte auf die umliegenden Knoten aufgebracht werden. Die Ermittlung der Größe dieser Kräfte ist nun Inhalt dieses Kapitels.

### 4.1 Äquivalente Knotenkräfte

Bei einer FE-Berechnung werden die äußeren Belastungen in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet, da das FE-Programm die Lasten nicht anders wahrnehmen kann. Die äußere Belastung und die Knotenkräfte sind dabei arbeitsäquivalent bezüglich der Knoteneinheitsverformungen  $\mathbf{j}_k$ . Bei einer Flächenlast  $p$  erhält man die äquivalenten Knotenkräfte  $f_k$ , wenn man  $p$  gegen die Einheitsverformungen der Knoten arbeiten lässt,

$$f_k := (p \mathbf{j}_k) = \int_{\Omega} p \mathbf{j}_k d\Omega. \quad (4.1)$$

Bei der Berechnung von Einflussfunktionen ist die Belastung aber eine Punktlast  $\mathbf{d}_i$ , also eine Einzelkraft, ein Einzelmoment, ein Knick oder ein Versatz. Daher ergeben sich die äquivalenten Knotenkräfte zu

$$f_k := (\mathbf{d}_i, \mathbf{j}_k) = \int_{\Omega} \mathbf{d}_i \mathbf{j}_k d\Omega. \quad (4.2)$$

Man kann diese Gleichung folgendermaßen lesen: Die Knotenkraft  $f_k$  ist die zu  $\mathbf{d}_i$  duale Weg- oder Kraftgröße von  $\mathbf{j}_k$ .

Wird z.B. beim Balken an der Stelle  $x_0$  ein Versatz ( $\mathbf{d}_3$ ) aufgebracht, so ist die zu  $\mathbf{d}_3$  duale Größe die Querkraft  $V$  und  $f_k$  ist dann gerade die Querkraft von  $\mathbf{j}_k$  an der Stelle  $x_0$ . Analog verhält es sich bei allen anderen Lastfällen  $\mathbf{d}$ . Für den Balken ergeben sich daher für  $\mathbf{d}_i$  an der Stelle  $x_0$  folgende Gleichungen:

$$\mathbf{d}_0 := \text{Einzelkraft} \quad f_k = \int_0^l \mathbf{d}_0(x_0) \mathbf{j}_k(x) dx = \mathbf{j}_k(x_0) \quad (4.3)$$

$$\mathbf{d}_1 := \text{Moment} \quad f_k = \int_0^l \mathbf{d}_1(x_0) \mathbf{j}_k(x) dx = \mathbf{j}_k^I(x_0) \quad (4.4)$$

$$\mathbf{d}_2 := \text{Knick} \quad f_k = \int_0^l \mathbf{d}_2(x_0) \mathbf{j}_k(x) dx = M_k(x_0) \quad (4.5)$$

$$\mathbf{d}_3 := \text{Versatz} \quad f_k = \int_0^l \mathbf{d}_3(x_0) \mathbf{j}_k(x) dx = V_k(x_0) \quad (4.6)$$

Der Vollständigkeit halber werden in den folgenden Tabellen die Werte der  $f_k$  für Stäbe, Scheiben und schubstarre Platten angegeben.

**Stab:**

Weg- oder Kraftgröße	duale Größe	$f_k$
$u$	Einzelkraft	$\mathbf{j}_k(x)$
$N$	Versatz	$N_k(x)$

**Tabelle 4.1** Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte für Einflussfunktionen bei Stäben

**Scheiben:**

Weg- oder Kraftgröße	duale Größe	$f_k$
$u_x, u_y$	Einzelkraft	$\mathbf{j}_k(x)$
$\mathbf{s}_{xx}, \mathbf{s}_{xy}, \mathbf{s}_{yy}$	Versatz	$\mathbf{s}_{xx}^k(x), \mathbf{s}_{xy}^k(x), \mathbf{s}_{yy}^k(x)$

**Tabelle 4.2** Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte für Einflussfunktionen bei Scheiben**Kirchhoff-Platte:**

Weg- oder Kraftgröße	duale Größe	$f_k$
$w$	Einzelkraft	$\mathbf{j}_k(x)$
$w_{,x}, w_{,y}$	Moment	$\mathbf{j}_{k,x}(x), \mathbf{j}_{k,y}(x)$
$m_{xx}, m_{xy}, m_{yy}$	Knick	$m_{xx}^k(x), m_{xy}^k(x), m_{yy}^k(x)$
$q_x, q_y$	Versatz	$q_x^k(x), q_y^k(x)$

**Tabelle 4.3** Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte für Einflussfunktionen bei schubstarren Platten

Will man z.B. die Einflussfunktion für die Spannung  $\mathbf{s}_{xx}$  in einem Punkt  $p$  in einem Element einer Scheibe berechnen, so erhält man z.B. die Knotenkraft  $f_1$  für Knoten 1 in x-Richtung, wenn nur der Knoten 1 um Eins in x-Richtung ausgelenkt wird. Dies stellt gerade die Knoteneinheitsverschiebung  $\mathbf{j}_1$  des Knotens 1 dar. Die gesuchte Knotenkraft ist jetzt die Spannung  $\mathbf{s}_{xx}$ , die im Punkt  $p$  infolge dieser Einheitsverschiebung entsteht.

$$f_1 = \int_{\Omega} \mathbf{d}_1 \mathbf{j}_1 d\Omega = \mathbf{s}_{xx}^1$$

Im folgenden Abschnitt sollen nun die Knotenkräfte für das Balkenelement sowie für das bilineare Scheibenelement ermittelt werden.

## 4.2 Knotenkräfte am Balkenelement

### 4.2.1 Formfunktionen

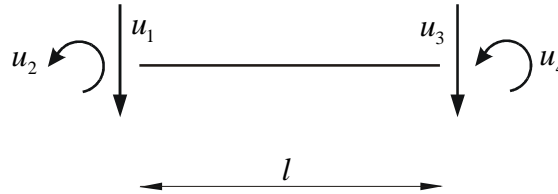


Abb. 4.1 Freiheitsgrade am Balkenelement

Die wesentliche Voraussetzung für die Ermittlung der Knotenkräfte für Einflussfunktionen besteht in der Formulierung des Verschiebungsansatzes des jeweiligen Elementes. Beim Balkenelement verwendet man ein Polynom 3. Grades, da dieses die möglichen Verschiebungszustände schon exakt abbilden kann. Die Ansatzfunktion für  $w(x)$  lautet demnach

$$w(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3.$$

Die Formfunktionen für das Balkenelement ergeben sich für diesen Ansatz zu:

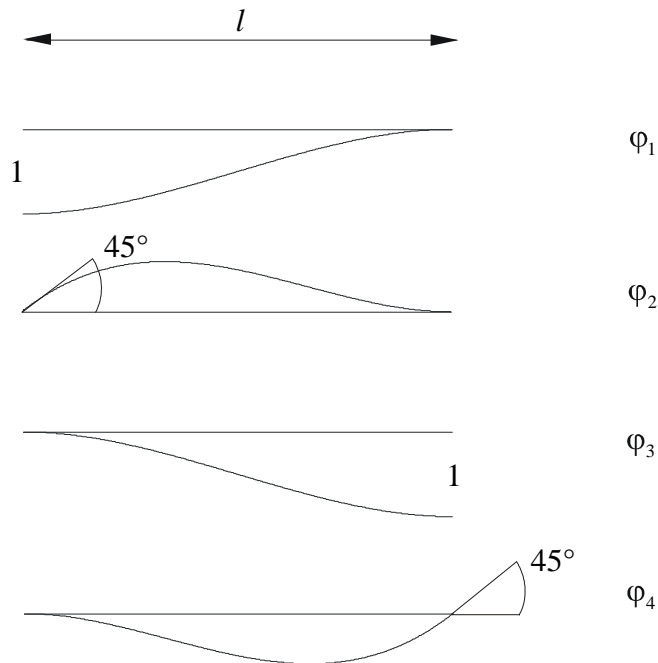
$$\mathbf{j}_1 = 1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.7)$$

$$\mathbf{j}_2 = -x + \frac{2x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2} \quad (4.8)$$

$$\mathbf{j}_3 = \frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3} \quad (4.9)$$

$$\mathbf{j}_4 = \frac{x^2}{l} - \frac{x^3}{l^2}. \quad (4.10)$$

Sie beschreiben den Verschiebungsverlauf infolge der Einheitsverformungen, siehe Abb. 4.2.



**Abb. 4.2** Einheitsverformungen beim Balkenelement

Es sollen nun mit Hilfe der Formfunktionen exemplarisch die Knotenkräfte zur Berechnung der Einflussfunktionen für Momente ermittelt werden.

#### 4.2.2 Einflussfunktion für das Moment

Die Knotenkräfte für die Einflussfunktion des Momentes ergeben sich nach Gleichung (4.5) zu

$$f_k = \int_0^l \mathbf{d}_2(x_0) \mathbf{j}_k(x) dx = M_k(x_0).$$

Die Knotenkräfte entsprechen somit den Momenten von  $\mathbf{j}_k$  an der Stelle  $x_0$ , die infolge der Einheitsverschiebung entstehen. Bei einem Balken mit konstanter Biegesteifigkeit gilt  $-EIw'' = M$ . Da nun  $\mathbf{j}_k$  die Biegelinie des Balkenelementes infolge der Einheitsverschiebung ist, gilt also auch  $-EI\mathbf{j}_k'' = M_k$ .

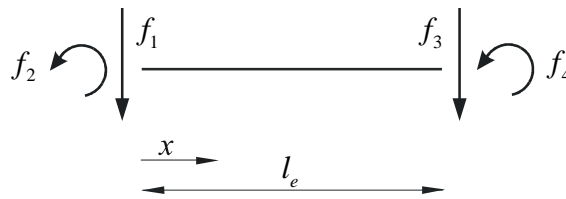


Abb. 4.3 Knotenkräfte am Balkenelement

Daher ergeben sich die Knotenkräfte, siehe Abb. 4.3, aus dem Produkt der zweiten Ableitung von  $\mathbf{j}_k$  und  $EI$  wie folgt:

$$f_1(x) = -EI \mathbf{j}_1''(x) = M_1(x) = -EI \left( -\frac{6}{l_e^2} + \frac{12x}{l_e^3} \right) \quad (4.11)$$

$$f_2(x) = -EI \mathbf{j}_2''(x) = M_2(x) = -EI \left( \frac{4}{l_e} - \frac{6x}{l_e^2} \right) \quad (4.12)$$

$$f_3(x) = -EI \mathbf{j}_3''(x) = M_3(x) = -EI \left( \frac{6}{l_e^2} - \frac{12x}{l_e^3} \right) \quad (4.13)$$

$$f_4(x) = -EI \mathbf{j}_4''(x) = M_4(x) = -EI \left( \frac{2}{l_e} - \frac{6x}{l_e^2} \right). \quad (4.14)$$

Die Variable  $x$  ist der Angriffspunkt der Last  $\mathbf{d}_i$  im Element, d.h. die Stelle der gesuchten Einflussfunktion. Die Knotenkräfte werden also elementweise berechnet. Dabei entstehen natürlich nur an den belasteten Elementen Knotenkräfte.

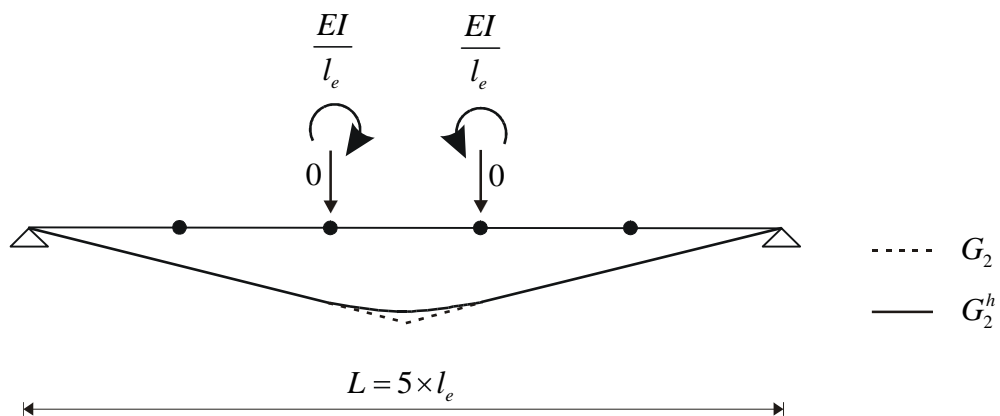


Abb. 4.4 Einflussfunktion für das Moment in Balkenmitte



In Abb. 4.4 ist die Einflussfunktion für das Moment in Balkenmitte mit 5 Elementen dargestellt. Die Knotenkräfte  $f_1$  und  $f_3$  sind Null, da bei den zugehörigen Einheitsverformungen die Momente in Elementmitte Null sind. Die beiden anderen Knotenkräfte erzeugen nun die Einflussfunktion  $G_2^h$ , die Näherung der exakten Einflussfunktion  $G_2$ . Man kann deutlich die Näherung erkennen, da das FE-Programm nicht in der Lage ist die Unstetigkeit, den Knick, darzustellen. In diesem Fall weichen jedoch nur die Werte im mittleren Element von der exakten Lösung ab.

Analog zum hier gezeigten lassen sich auch die Knotenkräfte für die anderen Einflussfunktionen beim Balken ermitteln.

### 4.3 Knotenkräfte beim bilinearen Scheibenelement (Q4)

#### 4.3.1 Vorbemerkungen

Scheiben sind ebene Flächentragwerke, die in ihrer Ebene belastet werden und deren Mittelebene bei der Beanspruchung eben bleibt. Bei der Berechnung von Scheibenproblemen wird entweder von einem ebenen Spannungszustand oder von einem ebenen Verzerrungszustand ausgegangen.

Beim ebenen Spannungszustand wird vorausgesetzt, dass die Spannungskomponenten in z-Richtung verschwinden.

$$s_{zz} = t_{yz} = t_{xz} = 0$$

Daher ergeben sich die Spannungen zu

$$\begin{bmatrix} s_{xx} \\ s_{yy} \\ t_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ g_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.15)$$

Der ebene Verzerrungszustand wird dadurch charakterisiert, dass die Verzerrungskomponenten in z-Richtung verschwinden.

$$e_{zz} = e_{xz} = e_{yz} = 0$$

Die Spannungen lauten hierfür

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} \\ \mathbf{s}_{yy} \\ \mathbf{t}_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\mathbf{n})(1-2\mathbf{n})} \begin{bmatrix} 1-\mathbf{n} & \mathbf{n} & 0 \\ \mathbf{n} & 1-\mathbf{n} & 0 \\ 0 & 0 & (1-2\mathbf{n})/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{g}_{xy} \end{bmatrix}. \quad (4.16)$$

Im Folgenden sollen nur Wandscheiben betrachtet werden, in denen ein ebener Spannungszustand vorliegt. In Abb. 4.5 sind hierfür die Spannungen an einem Scheibenelement dargestellt.

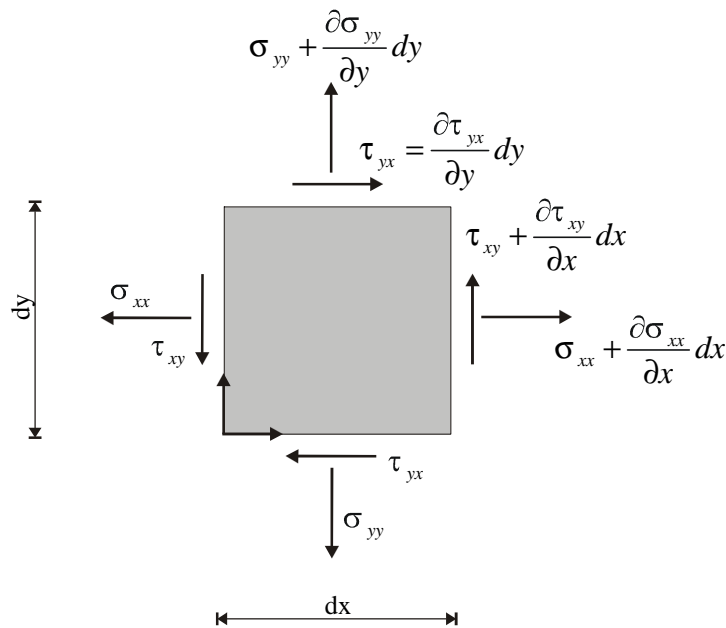


Abb. 4.5 Spannungen am infinitesimalen Scheibenelement

### 4.3.2 Formfunktionen

Das bilineare Scheibenelement mit vier Knoten (Q4) wurde nach dem Ansatz für die Verschiebungen benannt. Es wird also ein bilinearer Ansatz der Form

$$u(x, y) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 xy = \bar{\mathbf{j}}^T \mathbf{a} \quad (4.17)$$

$$v(x, y) = b_0 + b_1 x + b_2 y + b_3 xy = \bar{\mathbf{j}}^T \mathbf{b} \quad (4.18)$$

$$\text{mit } \bar{\mathbf{j}}^T = [1 \quad x \quad y \quad xy]$$

verwendet.

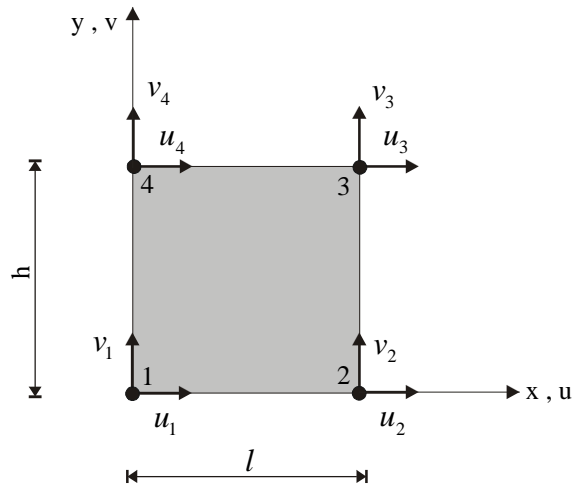


Abb. 4.6 Freiheitsgrade am Scheibenelement

Durch Normierung auf Knotenpunktverschiebungen, infolge der Einführung von Einheitsverschiebungsbedingungen, erhält man die Gleichungen zur Bestimmung der Koeffizienten der Ansatzfunktionen. Das Bezugskordinatensystem liegt dabei in der linken unteren Ecke, siehe Abb. 4.6.

$$u(x_i, y_i) = u_{u,i} = u_i$$

$$v(x_i, y_i) = u_{v,i} = v_i$$

$$u(x_1, y_1) = u(0, 0) = u_1 = a_0$$

$$u(x_2, y_2) = u(l, 0) = u_2 = a_0 + a_1 l$$

$$u(x_3, y_3) = u(l, h) = u_3 = a_0 + a_1 l + a_2 h + a_3 lh$$

$$u(x_4, y_4) = u(0, h) = u_4 = a_0 + a_2 h$$

In Matrizenschreibweise erhält man

$$\underbrace{\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{u}_u} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & 0 & 0 \\ 1 & l & h & lh \\ 1 & 0 & h & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{a}}. \quad (4.19)$$

Die Ansatzkoeffizienten  $\mathbf{a}$  ergeben sich nach Umstellung der Gleichung (4.19) zu

$$\mathbf{a} = \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_u. \quad (4.20)$$

Entsprechend gilt für die Ansatzkoeffizienten  $\mathbf{b}$ ,

$$\mathbf{b} = \mathbf{A}^{-1}\mathbf{u}_v. \quad (4.21)$$

Nach Einsetzen von Gleichung (4.20) in Gleichung (4.17) erhält man den Verschiebungsansatz

$$u(x, y) = \mathbf{j}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{u}_u = \mathbf{j}^T \mathbf{u}_u. \quad (4.22)$$

Die Formfunktionen ergeben sich demnach zu

$$\mathbf{j}^T = \mathbf{j}^T \mathbf{A}^{-1} = [\mathbf{j}_1 \quad \mathbf{j}_2 \quad \mathbf{j}_3 \quad \mathbf{j}_4] \quad (4.23)$$

$$\mathbf{j}^T = \left[ 1 - \frac{x}{l} - \frac{y}{h} + \frac{xy}{hl} \quad \frac{x}{l} - \frac{xy}{hl} \quad \frac{xy}{hl} \quad \frac{y}{h} - \frac{xy}{hl} \right]. \quad (4.24)$$

Mit  $l = a$  und  $h = b$  lauten die vier Formfunktionen für das bilineare Scheibenelement:

$$\mathbf{j}_1 = \frac{1}{ab}(a-x)(b-y) \quad (4.25)$$

$$\mathbf{j}_2 = \frac{x}{ab}(b-y) \quad (4.26)$$

$$\mathbf{j}_3 = \frac{xy}{ab} \quad (4.27)$$

$$\mathbf{j}_4 = \frac{y}{ab}(a-x). \quad (4.28)$$

### 4.3.3 Spannungen im Element

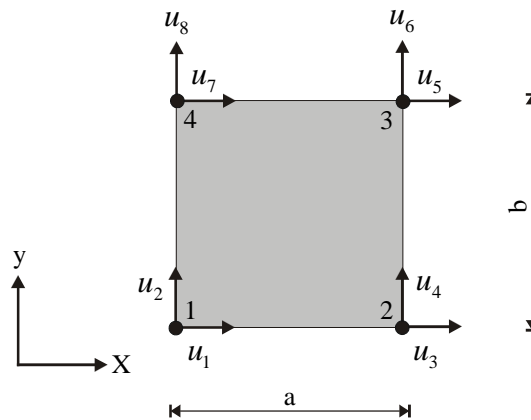


Abb. 4.7 Scheibenelement

Mit den im vorangegangenen Abschnitt gewonnenen Formfunktionen lassen sich alle Verschiebungen für einen Punkt des Elementes in Abhängigkeit von den Knotenverschiebungen angeben. Wenn nun im Folgenden alle Verschiebungen mit  $u_i$  bezeichnet werden, siehe Abb. 4.7, dann lauten die Verschiebungsansätze

$$u_x(x, y) = u_1 \mathbf{j}_1 + u_2 \mathbf{j}_2 + u_3 \mathbf{j}_3 + u_7 \mathbf{j}_4$$

$$u_y(x, y) = u_2 \mathbf{j}_1 + u_4 \mathbf{j}_2 + u_6 \mathbf{j}_3 + u_8 \mathbf{j}_4.$$

In Matrizenschreibweise ergibt sich

$$\mathbf{u}(x, y) = [\mathbf{j}] [\mathbf{u}]$$

$$\mathbf{u}(x, y) = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1 & 0 & \mathbf{j}_2 & 0 & \mathbf{j}_3 & 0 & \mathbf{j}_4 & 0 \\ 0 & \mathbf{j}_1 & 0 & \mathbf{j}_2 & 0 & \mathbf{j}_3 & 0 & \mathbf{j}_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \end{bmatrix}. \quad (4.29)$$

Die Dehnungen ergeben sich aus der Ableitung von Gleichung (4.29) nach  $x$  und  $y$

$$[\mathbf{e}] = [\mathbf{B}][\mathbf{u}],$$

mit

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial j_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial j_3}{\partial x} & 0 & \frac{\partial j_4}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial j_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial j_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial j_3}{\partial y} & 0 & \frac{\partial j_4}{\partial y} \\ \frac{\partial j_1}{\partial y} & \frac{\partial j_1}{\partial x} & \frac{\partial j_2}{\partial y} & \frac{\partial j_2}{\partial x} & \frac{\partial j_3}{\partial y} & \frac{\partial j_3}{\partial x} & \frac{\partial j_4}{\partial y} & \frac{\partial j_4}{\partial x} \end{bmatrix}$$

zu

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_{xx} \\ \mathbf{e}_{yy} \\ \mathbf{e}_{xy} \end{bmatrix} = \frac{1}{ab} \underbrace{\begin{bmatrix} y-b & 0 & -(y-b) & 0 & y & 0 & -y & 0 \\ 0 & x-a & 0 & -x & 0 & x & 0 & -(x-a) \\ x-a & y-b & -x & -(y-b) & x & y & -(x-a) & -y \end{bmatrix}}_{\mathbf{B}} [\mathbf{u}]. \quad (4.30)$$

Da bei Wandscheiben ein ebener Spannungszustand vorliegt, lautet die Werkstoffmatrix  $\mathbf{D}$ ,

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\mathbf{n}^2} \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{n} & 0 \\ \mathbf{n} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\mathbf{n})/2 \end{bmatrix}. \quad (4.31)$$

Die Spannungen ergeben sich aus, vgl. [5],

$$[\mathbf{s}] = [\mathbf{D}][\mathbf{e}] = [\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{u}]$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{s}_{xx} \\ \mathbf{s}_{yy} \\ \mathbf{s}_{xy} \end{bmatrix} = [\mathbf{D}][\mathbf{B}][\mathbf{u}]. \quad (4.32)$$

$$\mathbf{s}_{xx}(x, y) = \frac{E}{ab(-1+\mathbf{n}^2)} \cdot \begin{bmatrix} b(u_1 - u_3) + \mathbf{a}\mathbf{n}(u_2 - u_8) + \mathbf{m}\mathbf{n}(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + \\ + y(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

$$\mathbf{s}_{yy}(x, y) = \frac{E}{ab(-1+n^2)} \cdot \left[ \begin{array}{l} \mathbf{bn}(u_1 - u_3) + a(u_2 - u_8) + x(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) + \\ + y\mathbf{n}(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \end{array} \right] \quad (4.34)$$

$$\mathbf{s}_{xy}(x, y) = \frac{-E}{2ab(1+n)} \cdot \left[ \begin{array}{l} b(u_2 - u_4) + a(u_1 - u_7) + x(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) + \\ + y(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8) \end{array} \right] \quad (4.35)$$

mit  $a$  = Elementlänge,  $b$  = Elementhöhe,  $x$  = x-Koordinate im Element und  $y$  = y-Koordinate im Element.

#### 4.3.4 Einflussfunktionen für lokale Spannungen

Um die Einflussfunktion für eine Spannung in einem Punkt  $p$  eines Elementes zu erzeugen, müssen an den Knoten des Elementes Kräfte aufgebracht werden, welche die Versetzung von Eins am Punkt  $p$  erzwingen. Der Punkt  $p$  wird sozusagen aufgeschnitten und um Eins auseinandergedrückt. Die Knotenkräfte ergeben sich aus

$$f_k = \int_{\Omega} \mathbf{d}_k \mathbf{j}_k d\Omega = \mathbf{s}^k. \quad (4.36)$$

Die Knotenkräfte sind also gerade die Spannungen in dem gesuchten Punkt, die entstehen, wenn man die jeweilige Einheitsverformung auf das Element aufbringt. Die Spannungen im Element ergeben sich aus den Gleichungen (4.33), (4.34) und (4.35). Dabei ist immer für jedes  $f_k$  das zugehörige  $u_k = 1$  und alle anderen Verschiebungen sind Null.

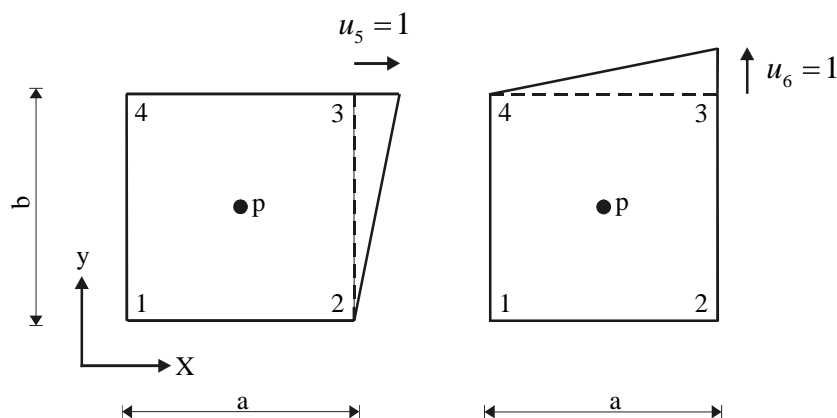


Abb. 4.8 Verschiebungszustände eines Elementes für  $u_5$  und  $u_6$

Will man z.B. die Einflussfunktion für  $\mathbf{s}_{yy}$  im Punkt  $p$  in Elementmitte berechnen, siehe Abb. 4.8, dann ergeben sich die Knotenkräfte  $f_5$  und  $f_6$  nach Gleichung (4.34) zu

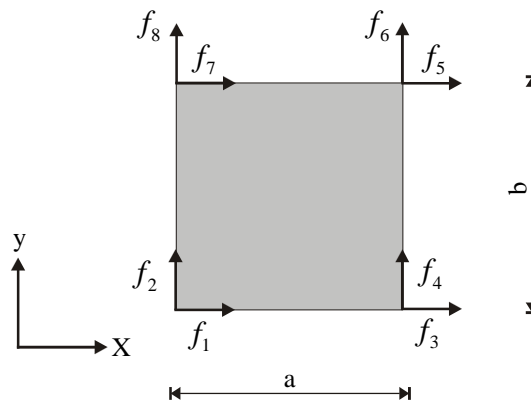
$$f_5 = \frac{-E\mathbf{n}}{2a(-1+\mathbf{n}^2)} = \mathbf{s}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

mit  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$  und  $u_5 = 1$ ,

$$f_6 = \frac{-E}{2b(-1+\mathbf{n}^2)} = \mathbf{s}_{yy}\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$$

mit  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{b}{2}$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_7 = u_8 = 0$  und  $u_6 = 1$ .

Die Knotenkraft  $f_5$  ist somit die Spannung im Punkt  $p$  infolge der Einheitsverschiebung  $u_5 = 1$  und  $f_6$  ist die Spannung im Punkt  $p$  infolge der Einheitsverschiebung  $u_6 = 1$ .

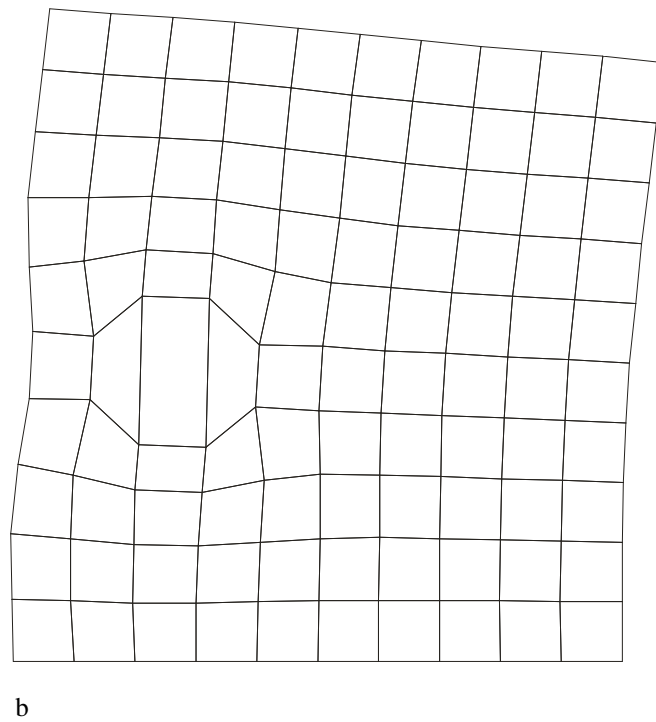
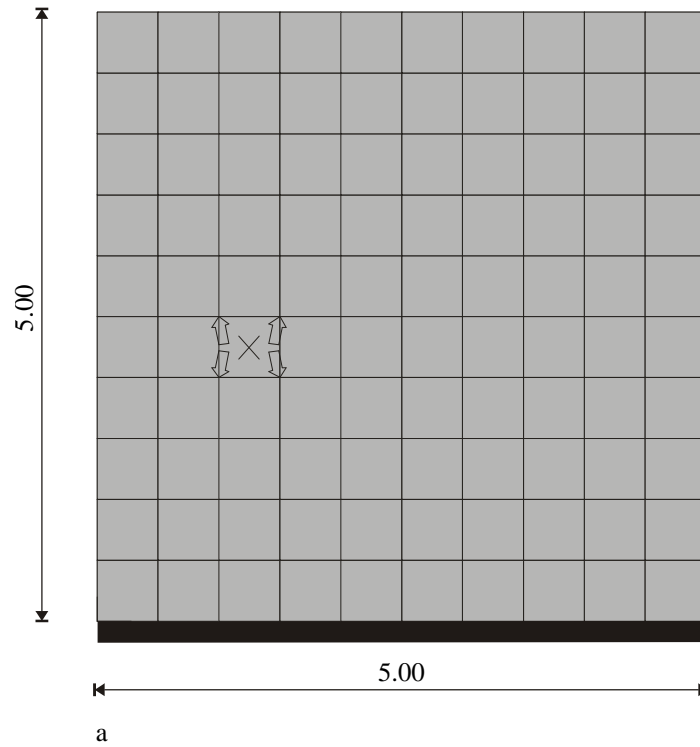


**Abb. 4.9** Knotenkräfte am Scheibenelement

So lassen sich nacheinander alle Knotenkräfte im Element berechnen. Die Knotenkräfte werden als äußere Belastung an die Knoten des betreffenden Elementes aufgebracht und anschließend wird dieser Lastfall vom FE-Programm gelöst. Als Ergebnis erhält man die genäherte Verformungsfigur, die Einflussfunktion  $G_1^h$  der jeweiligen Schnittgröße.



Bei Einflussfunktionen für Spannungen in einem Punkt  $p$  eines Elementes erzeugen die Knotenkräfte eine Näherung für die Versetzung des Punktes  $p$  um  $\Delta u = 1$ , siehe Abb. 4.10.



**Abb. 4.10** Berechnung der Einflussfunktion für eine Spannung in Elementmitte a) System und Belastung mit äquivalenten Knotenkräften, b) genäherte Einflussfunktion  $G_1^h$  für  $s_{yy}^h$  im Punkt  $x$

### 4.3.5 Einflussfunktionen für integrale Spannungen

Die äquivalenten Knotenkräfte für Spannungen in einem Punkt  $p$  eines Elements errechnen sich aus den Spannungen im Punkt  $p$  infolge der Einheitsverformungen  $\mathbf{j}_k$ . Damit ergeben sich die Knotenkräfte für die genäherten Einflussfunktionen für integrale Schnittgrößen aus den Integralen der Spannungen für Punktwerte. Nach Integration der Gleichungen (4.33), (4.34) und (4.35) erhält man

$$N_x = \int_0^b \mathbf{s}_{xx} dy = \frac{E}{2a(-1+\mathbf{n}^2)} \cdot \left[ \begin{array}{l} 2\mathbf{n}(a(u_2 - u_8) + x(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8)) + \\ + b(u_1 - u_3 - u_5 + u_7) \end{array} \right] \quad (4.37)$$

$$N_{xy} = \int_0^b \mathbf{s}_{xy} dy = \frac{E}{4a(1+\mathbf{n})} \cdot \left[ \begin{array}{l} -2a(-u_1 - u_7) + b(-u_2 + u_4 + u_6 - u_8) + \\ + 2x(u_1 - u_3 + u_5 - u_7) \end{array} \right] \quad (4.38)$$

$$N_y = \int_0^a \mathbf{s}_{yy} dx = \frac{E}{2b(-1+\mathbf{n}^2)} \cdot \left[ \begin{array}{l} 2b\mathbf{n}(u_1 - u_3) + a(u_2 + u_4 - u_6 - u_8) + \\ + 2y\mathbf{n}(-u_1 + u_3 - u_5 + u_7) \end{array} \right] \quad (4.39)$$

$$N_{yx} = \int_0^a \mathbf{s}_{yx} dx = \frac{E}{4b(1+\mathbf{n})} \cdot \left[ \begin{array}{l} -2(b(u_2 - u_4) + y(-u_2 + u_4 - u_6 + u_8)) + \\ + a(-u_1 - u_3 + u_5 + u_7) \end{array} \right] \quad (4.40)$$

mit  $a$ =Elementlänge,  $b$ =Elementhöhe,  $x$ =x-Koordinate im Element und  $y$ =y-Koordinate im Element.

Die äquivalenten Knotenkräfte für einen horizontalen oder vertikalen Schnitt durch ein Element erhält man aus den obigen Gleichungen. Die Kräfte werden dabei elementweise berechnet und an den gemeinsamen Knoten zweier Elemente addiert.

Will man z.B. die Einflussfunktion  $G_1^h$  für die Schnittkraft  $N_{yx}^h$  berechnen, erhält man die äquivalenten Knotenkräfte aus den aufintegrierten Scherspannungen  $\mathbf{s}_{yx}$  der Einheitsverformungen  $\mathbf{j}_k$  entlang des Schnittes A-A, siehe Abb. 4.11.

$$f_k = \int_{A-A} \mathbf{s}_{yx}^k dx$$

So ergeben sich z.B. die Knotenkräfte  $f_5$  und  $f_6$  eines Elementes entlang des Schnittes A-A nach Gleichung (4.40) zu

$$f_5 = \int_0^a \mathbf{s}_{yx} dx = \frac{E a}{4b(1+n)}$$

mit  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = 0$  und  $u_5 = 1$ ,

$$f_6 = \int_0^a \mathbf{s}_{yx} dx = \frac{E y}{2b(1+n)}$$

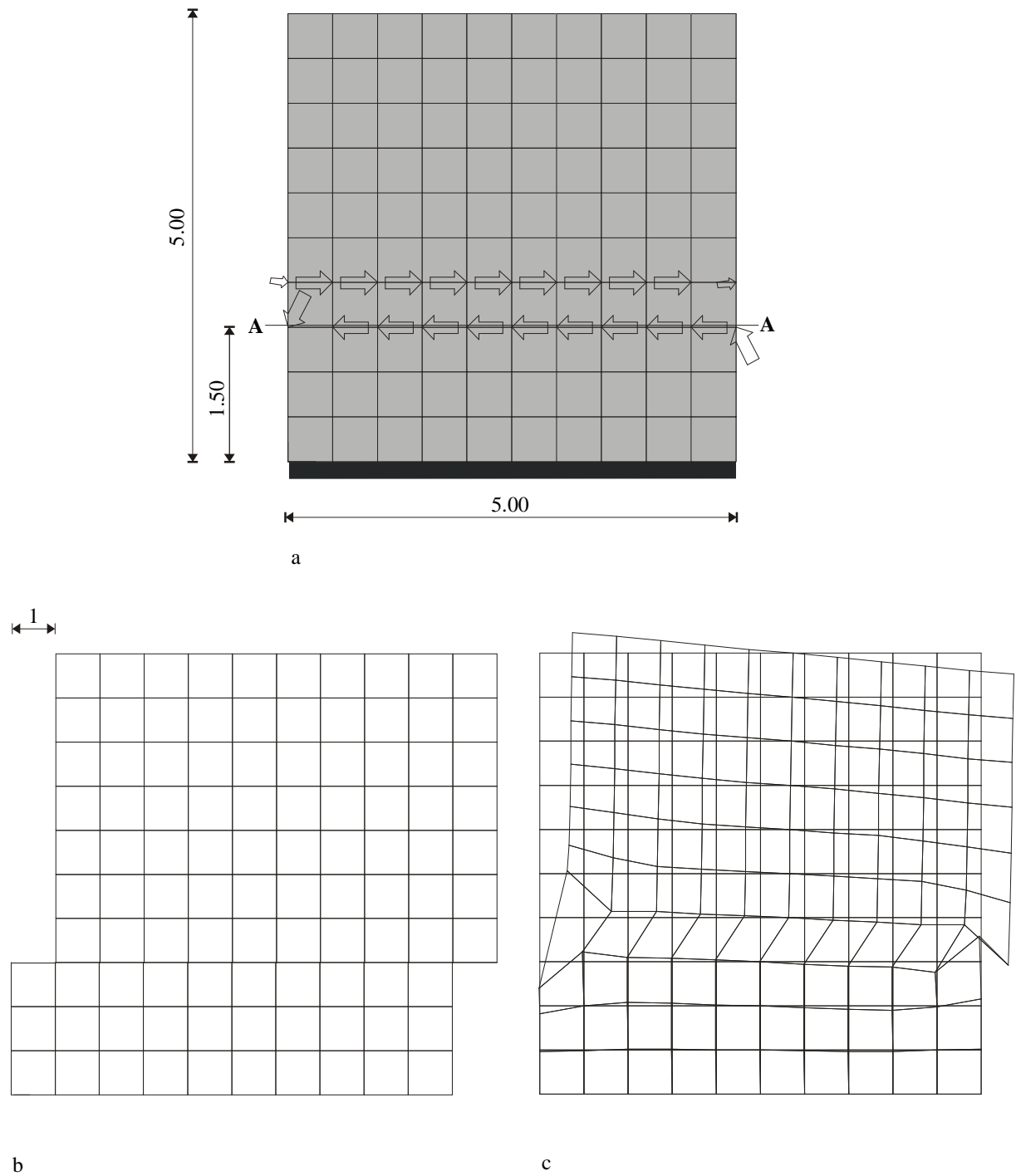
mit  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_7 = u_8 = 0$  und  $u_6 = 1$ .

Die Knotenkraft  $f_5$  ist die aufintegrierte Scherspannung im Schnitt A-A infolge der Einheitsverschiebung  $u_5 = 1$  und  $f_6$  die Scherspannung infolge  $u_6 = 1$ .

Es werden wieder alle Knotenkräfte nacheinander berechnet und als äußere Belastung angesetzt. Nach Lösung dieses Lastfalls erhält man die genäherte Einflussfunktion, eine Näherung für die Versetzung des gesamten Schnittes um Eins.

Je genauer das Netz diesen Versatz darstellen kann, umso genauer sind auch die Ergebnisse des FE-Programms, da sich ja jede Schnittgröße durch die Überlagerung der genäherten Einflussfunktion  $G_1^h$  mit der Belastung berechnen lässt. Man erhält also eine optische Kontrolle über die Leistungsfähigkeit des FE-Programms und die Genauigkeit der Ergebnisse.

In Abb. 4.11 erkennt man auf anschauliche Weise die Näherung der Einflussfunktion. Das Netz ist nicht in der Lage den Versatz exakt darzustellen.



**Abb. 4.11** Berechnung der Einflussfunktion einer integralen Schnittgröße a) System und Belastung mit äquivalenten Knotenkräften, b) exakte Einflussfunktion  $G_1$  für  $N_{yx}$ , c) genäherte Einflussfunktion  $G_1^h$  für  $N_{yx}^h$  im Schnitt A-A

## 4.4 Berechnung der Knotenkräfte bei anderen Elementen

In den vorangegangenen Abschnitten wurde die Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte für das Balkenelement und das bilineare Scheibenelement gezeigt. Die Vorgehensweise bei der Ermittlung dieser Kräfte für andere Scheiben- oder Plattenelemente erfolgt analog zu dem oben gezeigten.

$$f_k = (\mathbf{d}_i, \mathbf{j}_k)$$

Es ändern sich bei anderen Elementen natürlich die Verschiebungsansätze und damit auch die Formfunktionen. Des Weiteren müssen andere Werkstoffeigenschaften bei der Ermittlung der Schnittgrößen berücksichtigt werden.

Betrachtet man z.B. ein Plattenelement, welches auf der Kirchhoff Theorie basiert, dann ergeben sich die äquivalenten Knotenkräfte für die Berechnung der Einflussfunktion für  $m_{xx}$  im Punkt  $p$  zu

$$f_k = \int_{\Omega} \mathbf{d}_2 \mathbf{j}_k d\Omega = m_{xx}^k.$$

Die Knotenkräfte  $f_k$  sind die Momente  $m_{xx}^k$  im Punkt  $p$  infolge der Einheitsverschiebung  $\mathbf{j}_k$ . Diese Kräfte erzeugen dann näherungsweise einen Knick  $\Delta w' = 1$  im Punkt  $p$ , was eine Näherung der Einflussfunktion für  $m_{xx}$  darstellt.

Mit dieser Methode lassen sich sehr leicht die Knotenkräfte für die unterschiedlichsten Strukturen berechnen. An dieser Stelle soll jedoch nicht weiter darauf eingegangen werden.

## 5 Implementierung in ein FE-Programm

Im Rahmen dieser Diplomarbeit wurde die hier vorgestellte Methode zur Berechnung von Einflussfunktionen in ein bestehendes FE-Programm implementiert. Es handelt sich hierbei um das Programm WINFEM, ein FE-Programm zur linear elastischen Berechnung von Scheiben, welches im Fachgebiet Baustatik der Universität Kassel entwickelt wurde.

In dieser Arbeit soll nicht explizit auf die programmiertechnische Umsetzung eingegangen werden, da die Programmierung hier nur als Werkzeug betrachtet wird und die Darstellung der eigentlichen Methode im Vordergrund steht. Es werden nur einige allgemeine Informationen zum Programm und zur Ergebnisinterpretation gegeben. Der interessierte Leser sei auf die beiliegende CD-ROM verwiesen, welche den gesamten Quellcode sowie das lauffähige Programm enthält.

### 5.1 Programmstruktur und Berechnungsablauf

Das Programm WINFEM wurde in Visuell C++ geschrieben und besitzt daher auch die typische Windows-Oberfläche. Das Programm besteht aus fünf Modulen:

- WINFEM            Hauptmenü
- FEMCAD2        Eingabe der Geometrie
- LCADW            Eingabe der Belastung
- FEMSCHEIBE    Rechenkern
- GRAPH            Ausgabe der Ergebnisse

Da die Einflussfunktionen allein durch die entsprechenden äquivalenten Knotenkräfte erzeugt werden können, wurden nur im Modul LCADW Ergänzungen und Änderungen vorgenommen.

Im Einzelnen wurde die Berechnung von Einflussfunktionen für Spannungen im Knoten, für einen Punkt in einem Element sowie für integrale Spannungen in einem horizontalen oder vertikalen Schnitt implementiert. Die Auswahl des jeweiligen Knotens, Punktes oder Schnittes erfolgt graphisch durch Anklicken mit der Maus. Des Weiteren besteht die Möglichkeit die getroffene Auswahl in einem Dialogfenster zu modifizieren. In diesem Dialogfenster werden auch alle anderen Einstellungen vorgenommen, siehe Abb. 5.1.

Nach Abschluss aller Eingaben werden schließlich die Knotenkräfte berechnet und auf die entsprechenden Knoten aufgebracht. Dieser Lastfall wird nun gelöst und die daraus resultierende Verformungsfigur ist die gesuchte Einflussfunktion.

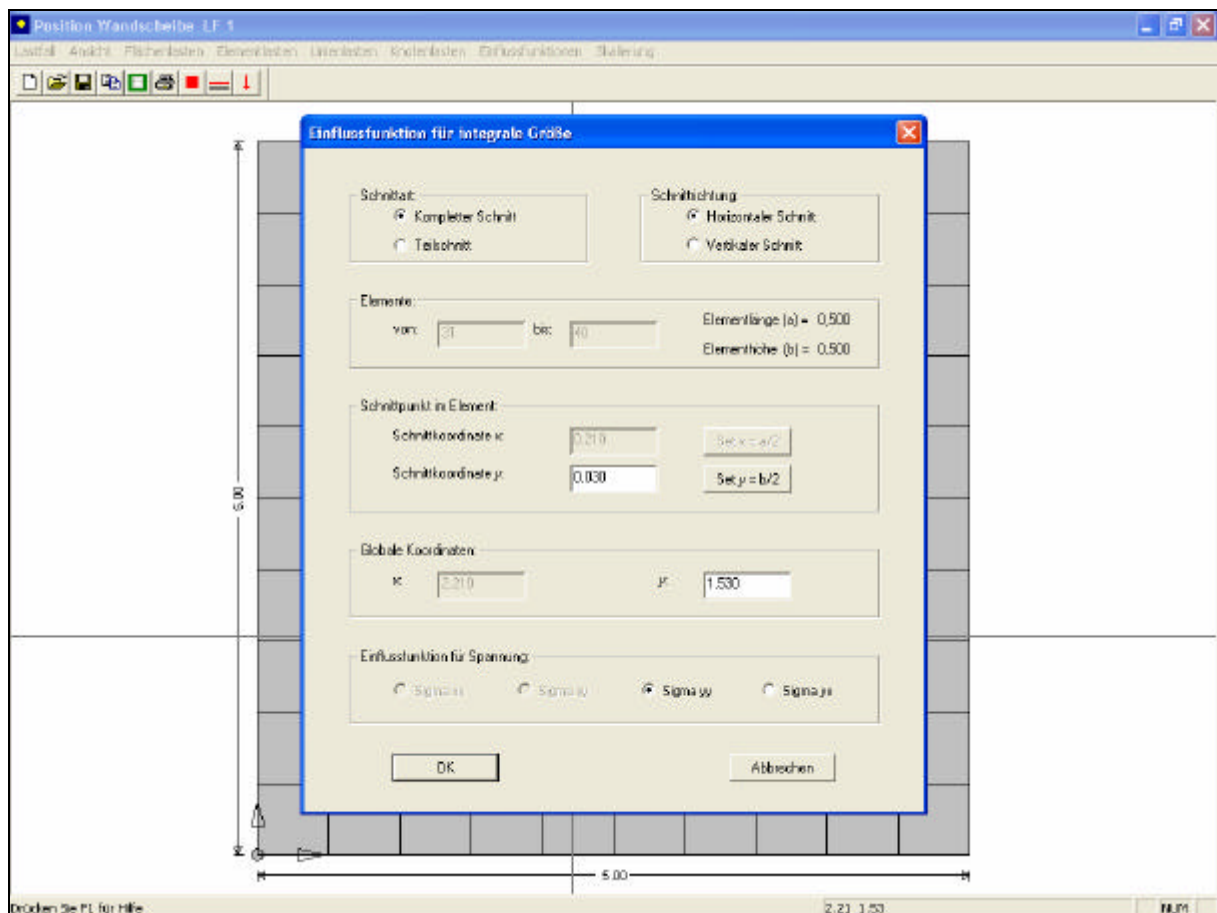


Abb. 5.1 Dialogfenster für die Berechnung von integralen Spannungen

## 5.2 Berechnung der äquivalenten Knotenkräfte

Zurzeit ist in WINFEM nur das bilineare Scheibenelement mit vier Knoten implementiert. Die Berechnung der Knotenkräfte für dieses Element wurde in Kapitel 4.3 gezeigt. Sie entsprechen den Spannungen infolge der Einheitsverschiebungen. Entsprechend erfolgt auch die Berechnung im FE-Programm.

Bei Einflussfunktionen für Spannungen in einem Punkt eines Elements wird nacheinander jeder Freiheitsgrad des Elements auf Eins gesetzt, die Spannung an der entsprechenden Stelle im Element berechnet und auf den Knoten als Knotenlast aufgebracht.

Um die Knotenkräfte für eine Einflussfunktion in einem Knoten zu berechnen, werden an allen den Knoten umgebenden Elementen die Kräfte ermittelt und an gemeinsamen Knoten der Elemente addiert. Abschließend werden diese Kräfte durch die Anzahl der beteiligten Elemente dividiert. Man ermittelt somit den Mittelwert der Knotenkraft. Dies entspricht der Mittelung der Spannungen in den Knoten bei der FE-Berechnung.

Die Knotenkräfte von Einflussfunktionen für integrale Spannungen werden elementweise ermittelt wie bei Spannungen in einem Punkt, diesmal jedoch mit den Gleichungen für die Integrale der Spannungen. Bei benachbarten Elementen werden die Knotenkräfte dann wieder addiert.

## 5.3 Interpretation der Ergebnisse

Bei allen Computerprogrammen, so auch bei WINFEM, muss der Benutzer wissen, wie die gefundenen Ergebnisse zu bewerten sind und was sie aussagen. Dies ist notwendig, um Fehlinterpretationen zu vermeiden.

Alle mit WINFEM berechneten äquivalenten Knotenkräfte, sind Kräfte zur Erzeugung von Einflussfunktionen für Spannungen. Dementsprechend sind auch alle Werte, die mit Hilfe dieser Einflussfunktionen ermittelt werden immer Spannungen.

Dies hat eine entscheidende Konsequenz für die ermittelten Verformungsfiguren. Wird beispielsweise die Einflussfunktion für eine integrale Spannung in einem horizontalen oder vertikalen Schnitt berechnet, so erwartet man eine Näherung für den Versatz von Eins entlang des gesamten Schnittes. Diesen Versatz von Eins erhält man aber nur bei Einflussfunktionen für Schnittkräfte und nicht bei Einflussfunktionen für Spannungen.



Die Schnittkräfte errechnen sich aus dem Produkt der Spannung und der Scheibendicke  $t$ . Für lokale Spannungen lauten die Normalkräfte

$$n_{xx} = t \cdot \mathbf{s}_{xx} \quad n_{yy} = t \cdot \mathbf{s}_{yy} \quad n_{xy} = t \cdot \mathbf{s}_{xy} \quad [kN/m],$$

für integrale Spannungen gilt mit  $t = \text{konstant}$

$$N_x = t \cdot \int \mathbf{s}_{xx} dy \quad N_{xy} = t \cdot \int \mathbf{s}_{xy} dy \quad N_y = t \cdot \int \mathbf{s}_{yy} dx \quad N_{yx} = t \cdot \int \mathbf{s}_{yx} dy \quad [kN].$$

Entsprechend erhält man die Verformungsfigur für die Schnittkraft aus dem Produkt der Greenschen Funktion und der Scheibendicke.

Mit einer Scheibendicke von  $t = 0.5$  bedeutet dies für das obige Beispiel, dass an einem beliebigen Knoten die Verschiebung doppelt so groß ist wie die Verschiebung bei einer Einflussfunktion für eine Schnittkraft. Die Schnittkraft ergibt sich dann aus dem Produkt der Spannung und der Scheibendicke.

Deshalb weichen die Werte der Verformungen, außer für den Fall  $t = 1$ , von dem erwarteten Ergebnis ab. Diese sind natürlich trotz allem richtig, aber eben nur für die Spannungen. Es ist wichtig diesen Aspekt bei Berechnungen von Einflussfunktionen mit WINFEM nicht aus den Augen zu verlieren, da es sonst zu einer falschen Interpretation der Ergebnisse kommen könnte.

## 6 Numerische Ergebnisse

In diesem Kapitel soll nun anhand einiger Beispiele für Einflussfunktionen noch einmal anschaulich der Näherungscharakter der Methode der finiten Elemente gezeigt werden. Es werden hierfür die Einflussfunktionen für lokale und integrale Schnittgrößen berechnet. Die Berechnung erfolgt nach der hier vorgestellten Methode und es soll deutlich werden, dass die numerischen Ergebnisse einer FE-Berechnung mit Hilfe von Einflussfunktionen bewertet werden können.

### 6.1 Wandscheibe mit verschiedenen Belastungen

In diesem Beispiel soll die Spannung  $\mathbf{s}_{xx}$  in einem Knoten  $z$  für verschiedene Lastfälle berechnet werden. Es soll dabei noch einmal prinzipiell gezeigt werden, wie man mit Hilfe der einmal berechneten Einflussfunktion verschiedene Laststellungen auswerten kann.

Gegeben sei eine Rechteckscheibe mit den Außenabmessungen:

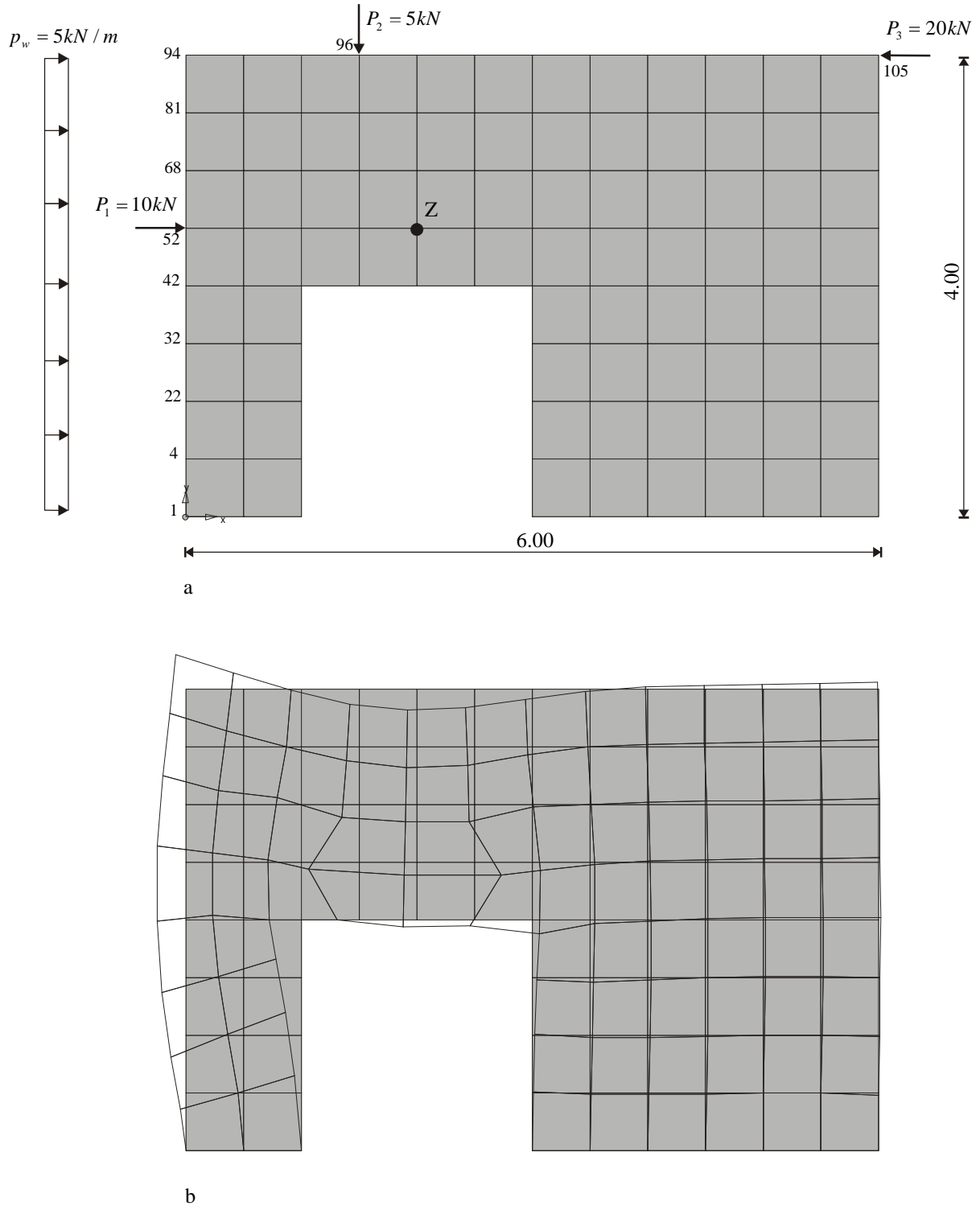
Länge:	$l = 6.00\ m$
Höhe:	$h = 4.00\ m$
Dicke:	$t = 0.20\ m$

und den Materialdaten:

Elastizitätsmodul:	$E = 30000\ MN / m^2$
Querdehnzahl:	$\nu = 0.16$

Der untere Rand der Scheibe sei dabei starr gelagert.

Die Elementlänge und die Elementhöhe betragen  $a = b = 0.50m$  und es wurde das bilineare Scheibenelement mit vier Knoten verwendet.



**Abb. 6.1** a) System mit verschiedenen Belastungen, b) genäherte Einflussfunktion  $G_1^h$  für  $s_{xx}^h$  im Punkt z

Die Auswertung der Einflussfunktion für die unterschiedlichsten Belastungen erfolgt nach

$$\mathbf{s}_{xx}^h = \int_{\Omega} G_1^h(y, x) p(y) d\Omega_y.$$

Die Einflussfunktion  $G_1^h$  für  $\mathbf{s}_{xx}^h$  im Knoten  $z$  ist in Abb. 6.1 dargestellt. Sie entspricht einer Näherung für die Versetzung des Knotens  $z$  um Eins in x-Richtung. Es lässt sich nun aus dieser Einflussfunktion für jede Belastung die Spannung im Knoten  $z$  angeben.

Knoten	$u_x$ [m]	$u_y$ [m]
1	0	0
4	-0.55463269	-0.48183109
22	-1.41399432	-0.63226883
32	-2.25338627	-0.43713421
42	-2.72936389	-0.00237901
52	-2.68314628	0.50088364
68	-2.20872071	0.86534955
81	-1.56997402	1.02564092
94	-0.95812993	1.06172889
96	-0.83143202	-0.41908967
105	-0.00780170	0.22190993

**Tabelle 6.1** Knotenverschiebungen der Einflussfunktion  $G_1^h$  für  $\mathbf{s}_{xx}^h$  im Knoten  $z$

Die Lasten  $P_1$  bis  $P_3$  sind Einzellasten, daher ergibt sich die Spannung im Knoten  $z$  aus dem Produkt der Verschiebung  $u_i$  des belasteten Knotens in Krafrichtung und der Kraft.

Für  $P_1 = 10kN$  :  $\mathbf{s}_{xx}^h = u_{52,x} \cdot P_1 = -2.68314628 \cdot 10 = -26.8314628 \text{ kN} / m^2.$

Für  $P_2 = 5kN$  :  $\mathbf{s}_{xx}^h = u_{96,y} \cdot P_2 = -0.41908967 \cdot (-5) = 2.09544835 \text{ kN} / m^2.$

Für  $P_3 = 20kN$  :  $\mathbf{s}_{xx}^h = u_{105,x} \cdot P_3 = -0.00780170 \cdot (-20) = 0.156034 \text{ kN} / m^2.$

Die Kräfte  $P_2$  und  $P_3$  wirken entgegen der Positivrichtung und werden deshalb negativ angesetzt.

Die Spannung aus der Windlast  $p_w$  erhält man nach der Trapezformel aus den horizontalen Verschiebungen  $u_{i,x}$  entlang der angreifenden Gleichlast

$$\mathbf{s}_{xx}^h = \int_0^4 G_1^h(y, x) p(y) ds_y$$

$$\mathbf{s}_{xx}^h = \left( \frac{1}{2} u_{1,x} + u_{2,x} + u_{3,x} \dots + u_{n-1,x} + \frac{1}{2} u_{n,x} \right) \cdot h \cdot p_w$$

$$\mathbf{s}_{xx}^h = \left( \begin{array}{c} \frac{1}{2} \cdot 0 - 0.554632691 \cdot 4.1399432 - 2.25338627 - 2.72936389 - \\ -2.68314628 - 2.20872071 - 1.56997402 - \frac{1}{2} \cdot 0.95812993 \end{array} \right) \cdot 0.5 \cdot 5 \text{ kN} / \text{m}$$

$$\mathbf{s}_{xx}^h = -34.73058759 \text{ kN} / \text{m}^2.$$

Dies entspricht der Verteilung der Gleichflächenlast als resultierende Einzellasten auf die Knoten.

Die bisher ermittelten Spannungen im Knoten  $z$  resultierten aus den jeweiligen Einzellastfällen. Treten nun mehrere Lastfälle gleichzeitig auf, so können die Einzelergebnisse addiert werden. Für den Fall, dass alle in Abb. 6.1 dargestellten Lastfälle gleichzeitig auftreten, ergibt sich demnach die Spannung im Knoten  $z$  aus der Summe der Einzelspannungen.

$$\mathbf{s}_{xx,ges}^h = \sum_{i=1}^4 \mathbf{s}_{xx,i}^h$$

$$\mathbf{s}_{xx,ges}^h = -26.8314628 + 2.09544835 + 0.156034 - 34.73058759$$

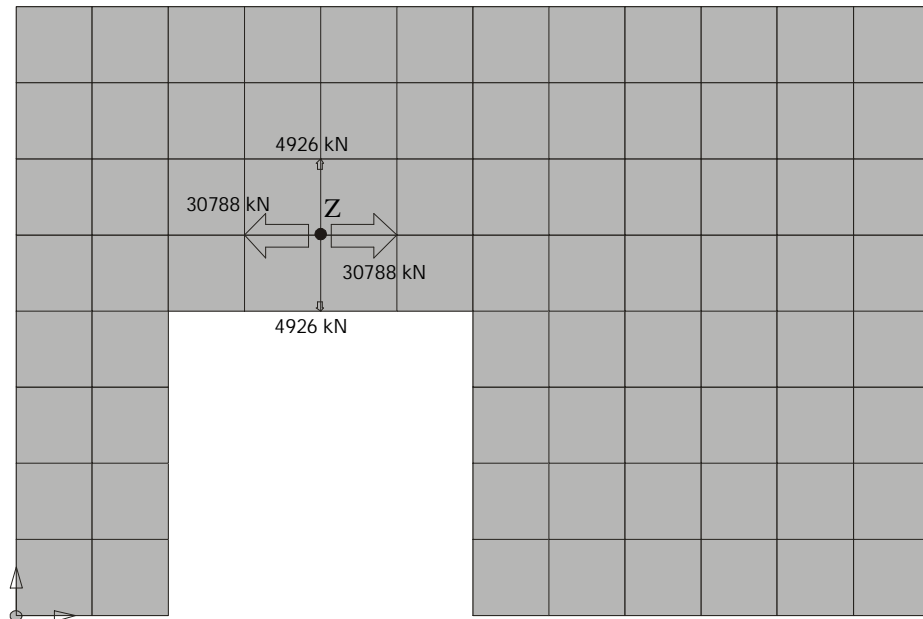
$$\mathbf{s}_{xx,ges}^h = -59.31056804 \text{ kN} / \text{m}^2$$

Alle hier ermittelten Ergebnisse lassen sich leicht überprüfen, indem man die Lastfälle mit dem FE-Programm berechnet und die Spannung im Knoten  $z$  bestimmt. Eine Überprüfung erbrachte hierbei eine vollständige Übereinstimmung der Ergebnisse bis zur 7. Nachkommastelle.

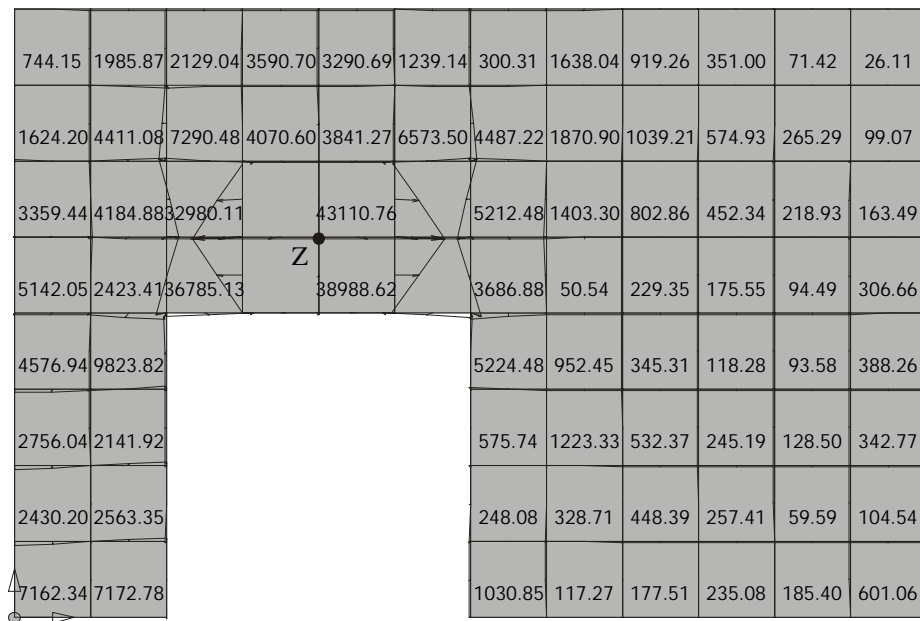
Wie dieses Beispiel zeigt, lässt sich die Spannung in einem Punkt für beliebige Laststellungen aus der Überlagerung der genäherten Greenschen Funktion mit der Belastung berechnen. Dabei muss die Greensche Funktion nur einmal ermittelt werden und es muss nicht wie bei einer herkömmlichen FE-Berechnung jeder Lastfall einzeln gelöst werden.

Außerdem erhält man für den Fall einer Wanderlast sofort anschaulich die ungünstigste Laststellung. Eine Kraft, welche in dem Knoten mit den maximalen Verschiebungen angreift, liefert natürlich auch die maximalen Beanspruchungen im Knoten  $z$ .

In Abb. 6.2 ist für dieses Beispiel der Lastfall  $\mathbf{d}$ , also die äquivalenten Knotenkräfte zur Erzeugung der Einflussfunktion für  $\mathbf{s}_{xx}^h$ , dargestellt. Außerdem ist der FE-Lastfall  $\mathbf{d}_h$  angegeben. Das ist der Lastfall, den das FE-Programm eigentlich gelöst hat. Er setzt sich aus Element- und Kantenlasten zusammen, vgl. Kapitel 3.2.



a



b

**Abb. 6.2** a) Lastfall  $d$  - äquivalente Knotenkräfte für die Einflussfunktion  $s_{xx}^h$  im Knoten  $z$ , b) FE-Lastfall  $d_h$  - eigentlich gelöster Lastfall

## 6.2 Rahmen mit horizontaler Einzelkraft

An einem Rahmen sollen die Querkräfte in den Stielen infolge einer horizontalen Einzellast ermittelt werden, siehe Abb. 6.3.

Gegeben sei ein Rahmen mit den Außenabmessungen:

$$\text{Länge:} \quad l = 4.00 \text{ m}$$

$$\text{Höhe:} \quad h = 2.50 \text{ m}$$

$$\text{Dicke:} \quad t = 0.20 \text{ m}$$

und den Materialdaten:

$$\text{Elastizitätsmodul:} \quad E = 30000 \text{ MN} / \text{m}^2$$

$$\text{Querdehnzahl:} \quad \nu = 0.16.$$

Der Rahmen sei dabei beidseitig eingespannt. Für die Berechnung wurde das bilineare Scheibenelement verwendet, wobei die Elementlänge und die Elementhöhe  $a = b = 0.25 \text{ m}$  betragen.

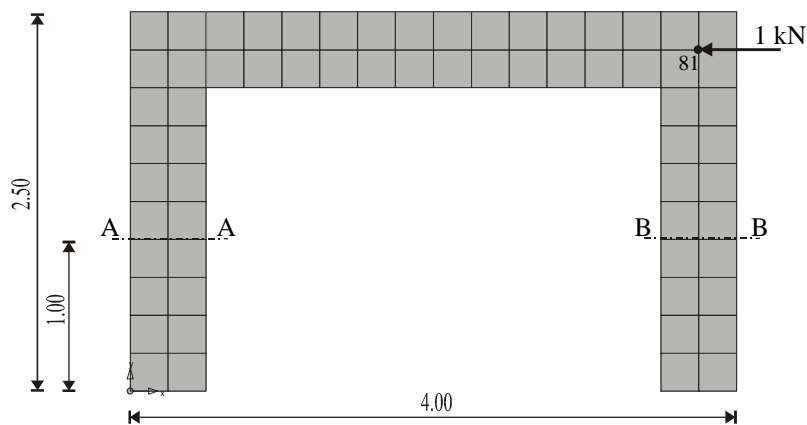
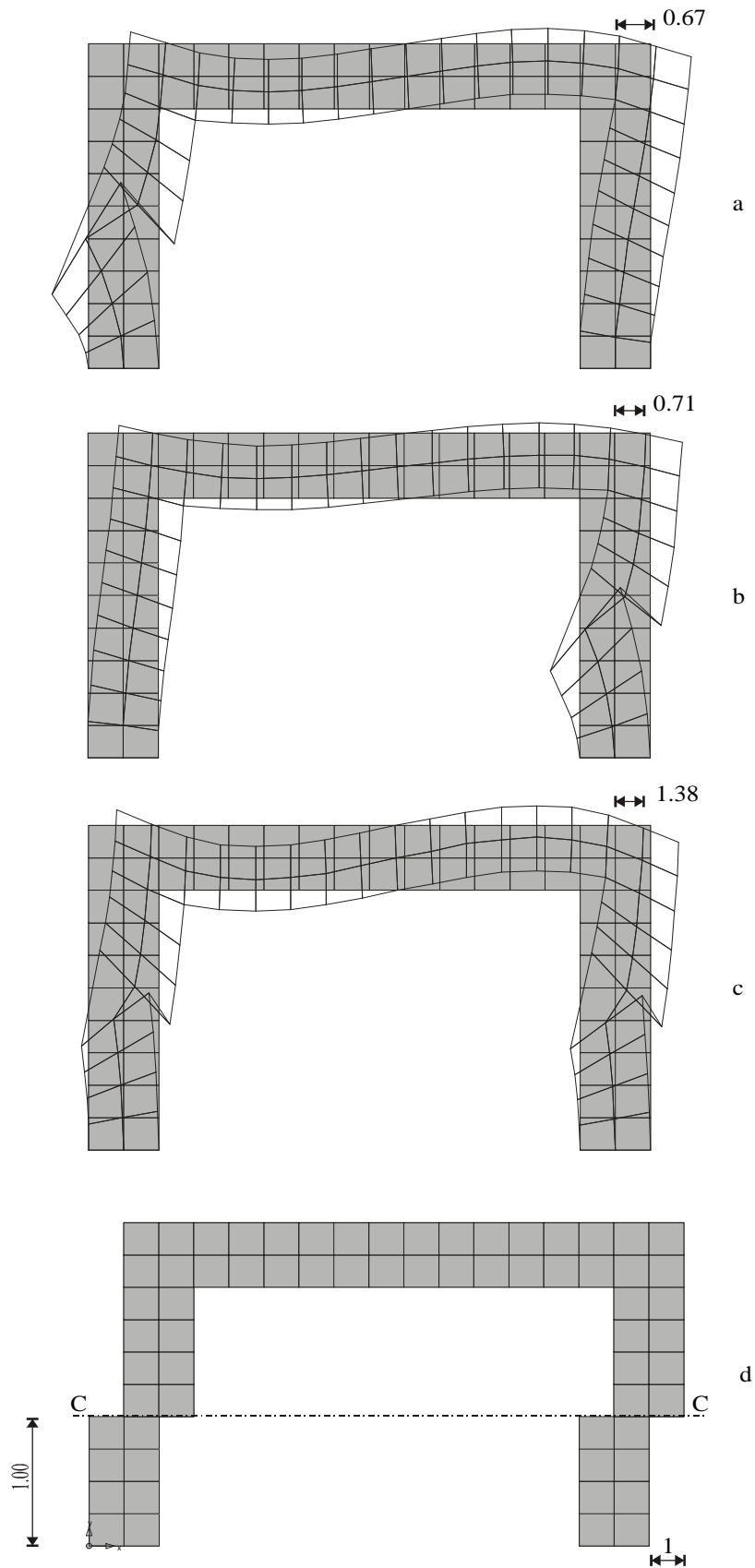


Abb. 6.3 System und Belastung





**Abb. 6.4** Einflussfunktionen beim Rahmen a) genäherte Einflussfunktion für  $N_{yx}^h$  im Schnitt A-A, b) genäherte Einflussfunktion für  $N_{yx}^h$  im Schnitt B-B, c) genäherte Einflussfunktion für  $N_{yx}^h$  im Schnitt C-C, d) exakte Einflussfunktion für  $N_{yx}$  im Schnitt C-C

Die Querkraft in den Stielen infolge der Einzellast am Knoten 81 ergibt sich wieder aus der Überlagerung der Greenschen Funktion mit der Belastung zu

$$N_{yx}^h = t \cdot \int_{\Omega} G_1^h(y, x) p(y) d\Omega_y .$$

Die Greenschen Funktionen wurden für die integralen Spannungen in den Stielen ermittelt. Um nun die Greenschen Funktionen für die Querkraft zu erhalten, muss man die jeweiligen Verformungen mit der Scheibendicke multiplizieren. In Abb. 6.4 sind die Verformungen angetragen, welche zur Greenschen Funktion für die Querkraft gehören.

Die Querkräfte ergeben sich wie folgt: Für den linken Stiel im Schnitt A-A

$$N_{yx}^h = t \cdot u_{81,x} \cdot P$$

$$N_{yx}^h = 0.2 \cdot 3.37 \cdot (-1) = -0.67 \text{ kN} ,$$

für den rechten Stiel im Schnitt B-B

$$N_{yx}^h = 0.2 \cdot 3.54 \cdot (-1) = -0.71 \text{ kN}$$

und für beide Stiele im Schnitt C-C ergibt sich

$$N_{yx}^h = 0.2 \cdot 6.91 \cdot (-1) = -1.38 \text{ kN}$$

mit  $u_{81,x}$  = die horizontale Verschiebung am Knoten 81 der Einflussfunktion für die Spannung.

Das Ergebnis zeigt, dass das Gleichgewicht im Schnitt nicht erfüllt wird. Die exakte Querkraft in einem Ersatzsystem würde in jedem Stiel  $N_{yx} = 0.5 \cdot P$  betragen und beim Schnitt durch beide Stiele müsste die Summe beider Querkräfte die äußere Belastung ergeben, siehe Abb. 6.5.

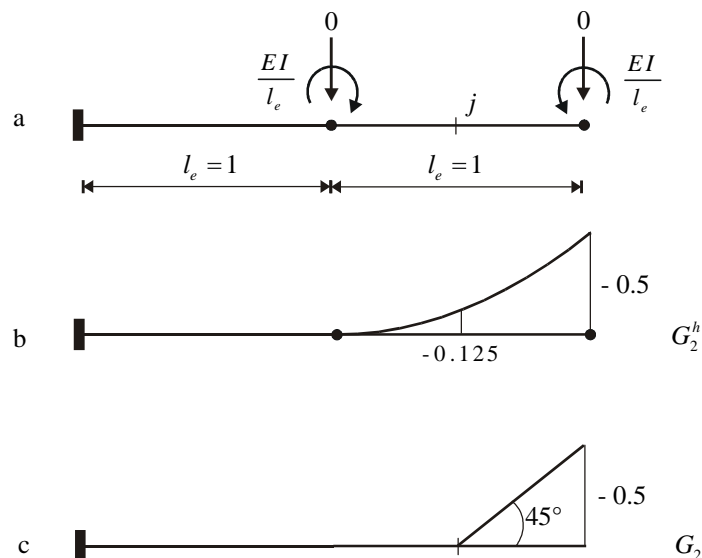


**Abb. 6.5** Ersatzsystem mit exakten Querkraftverlauf in den Stielen

Die Ergebnisse weichen von der exakten Lösung ab, weil das Netz die exakten Einflussfunktionen nicht darstellen kann. Für den Fall eines Schnittes durch beide Stiele, müsste das Netz einen Versatz von Eins oberhalb des Schnittes realisieren. Das FE-Programm hat jedoch Schwierigkeiten diese Verformungsfigur darzustellen, siehe Abb. 6.4c.

### 6.3 Einflussfunktion für das Moment beim Kragträger

An einem mit 2 Balkenelementen modellierten Kragträger soll die Einflussfunktion für das Moment im Punkt  $j$  ermittelt werden. Gegeben sei ein Balken mit konstanter Biegesteifigkeit, siehe Abb. 6.6.

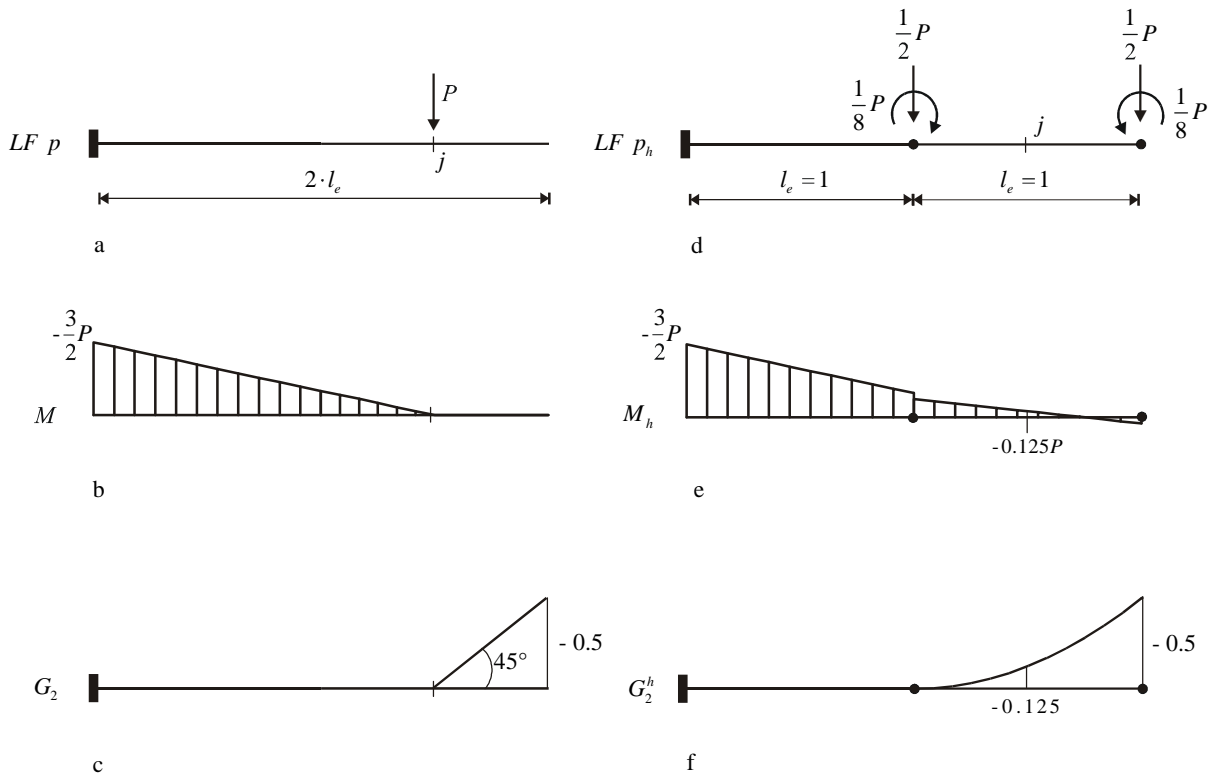


**Abb. 6.6** Kragträger a) System und Belastung mit äquivalenten Knotenkräften, b) Einflussfunktion  $G_2^h$  für das Moment im Punkt  $j$ , c) exakte Einflussfunktion  $G_2$  für das Moment im Punkt  $j$

Die äquivalenten Knotenkräfte für die Einflussfunktion des Momentes in Elementmitte sind die Momente der Einheitsverschiebungen  $\mathbf{j}_k$ , siehe Kapitel 4.2. Diese Kräfte verursachen die Verformungsfigur  $G_2^h$ , was die Näherung für einen Knick von  $\Delta w' = 1$  darstellt, siehe Abb. 6.6b. Die exakte Einflussfunktion ist ein Knick im Punkt  $j$ , siehe Abb. 6.6c. Das FE-Programm kann diese Unstetigkeit jedoch nicht darzustellen.

Die Verschiebung von  $G_2^h$  am Ende des Balkens beträgt wie in der exakten Lösung  $-0.5$ . Alle anderen Werte zwischen dem Mittelknoten und dem Endknoten weichen von der exakten

Lösung ab. Die Verschiebung am Punkt  $j$  beträgt  $-0.125$ , obwohl sie Null sein müsste. Das bedeutet im Fall einer Einzellast  $P$  im Punkt  $j$ , dass die FE-Lösung an dieser Stelle ein Moment von  $-0.125 \cdot P$  liefert, da sich das Moment  $M_h$  aus der Überlagerung der Green-schen Funktion  $G_2^h$  mit der Belastung berechnet.



**Abb. 6.7** Vergleich zwischen exakter- und FE-Lösung a) der Lastfall  $p$ , b) Momentenverlauf  $M(x)$ , c) die exakte Einflussfunktion  $G_2$  für das Moment im Punkt  $j$ , d) der Lastfall  $p_h$ , e) Momentenverlauf  $M_h(x)$ , f) Einflussfunktion  $G_2^h$  für das Moment im Punkt  $j$

An diesem einfachen Beispiel lässt sich nun auch leicht zeigen, dass man bei der FE-Lösung den gleichen Wert für das Moment im Punkt  $j$  erhält. Die Einzellast  $P$  wird in äquivalente Knotenkräfte umgerechnet, da das FE-Programm die Last in Elementmitte nicht anders wahrnehmen kann. Die Knotenkräfte erhält man aus

$$f_k = \int_0^l p \mathbf{j}_k dx.$$

Damit ergibt sich z.B. die Knotenkraft  $f_1$  für die Einzellast  $P$  in Elementmitte zu

$$f_1 = P \cdot \mathbf{j}_1(l_e/2) = \frac{1}{2} P.$$

Alle anderen Knotenkräfte lassen sich analog dazu bestimmen, siehe Abb. 6.7d. Die äquivalenten Knotenkräfte entsprechen beim Balken den Lasten aus dem Lastfall  $p_h$ . Der Momentenverlauf, der zu diesem Lastfall gehört ist in Abb. 6.7e dargestellt. An der Stelle  $j$  liefert er genau den Wert  $-0.125 \cdot P$ . Man erhält also ein Moment von  $-0.125 \cdot P$ , obwohl es nach der exakten Lösung Null sein müsste.

Der Fehler ergibt sich demnach in diesem Beispiel zu

$$e = M - M_h = \int_0^l [G_2(y, x) - G_2^h(y, x)] p(y) dy = [0 - (-0.125)] \cdot P = 0.125 \cdot P.$$

## 6.4 Einflussfunktion für die Querkraft beim Balken

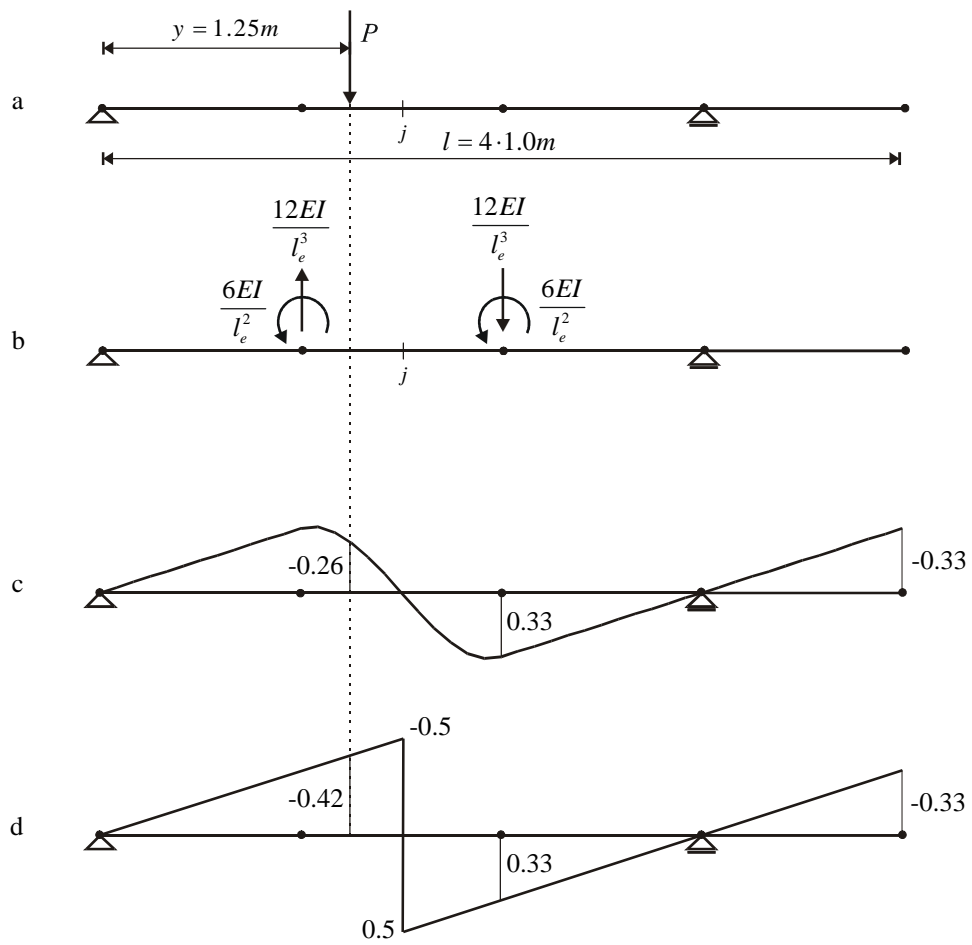
In diesem Beispiel soll die Einflussfunktion für die Querkraft im Punkt  $j$  ermittelt werden, siehe Abb. 6.8. Es wird ein Balken mit 4 Elementen und konstanter Biegesteifigkeit betrachtet.

Die äquivalenten Knotenkräfte sind in Abb. 6.8b angetragen. Sie ergeben sich aus

$$f_k = -EI j_k'''(x) = V_k(x).$$

Sie entsprechen den Querkraften von  $j_k$  an der Stelle der gesuchten Einflussfunktion infolge der Einheitsverschiebungen. Die resultierende Verformungsfigur ist eine Näherung für die exakte Einflussfunktion, siehe Abb. 6.8c. Die exakte Einflussfunktion ist ein Versatz von Eins an der Stelle  $j$ , siehe Abb. 6.8d. Diese Unstetigkeit kann das Programm jedoch nicht realisieren. Deshalb weichen die Werte im Element in Balkenmitte von der exakten Lösung ab. In allen anderen Elementen stimmen beide Lösungen überein.

Für den Fall einer Einzellast  $P$  bei  $y = 1.25m$ , liefert die FE-Lösung bei Auswertung der Einflussfunktion  $G_3^h$  den Wert  $-0.26 \cdot P$ . Die exakte Lösung beträgt jedoch  $-0.42 \cdot P$ . Die Abweichung beträgt damit  $\approx 38\%$ . Im Gegensatz zu den vorangegangenen Beispielen liegt die Abweichung hier nicht auf der sicheren Seite. Ohne eine kritische Beurteilung der Ergebnisse könnte es deshalb zu einer falschen Dimensionierung des Trägers kommen.



**Abb. 6.8** a) System und Belastung, b) äquivalente Knotenkräfte für die Einflussfunktion der Querkraft im Punkt  $j$ , c) genäherte Einflussfunktion  $G_3^h$ , d) exakte Einflussfunktion  $G_3$

## 6.5 Krag­scheibe

In diesem abschließenden Beispiel soll das Gleichgewicht in einem Schnitt einer Krag­scheibe untersucht werden. Es sind dabei zwei Lastfälle zu behandeln, eine vertikale Einzellast und eine horizontale Gleichstreckenlast. Hierfür werden die Einflussfunktionen für die Schnittkräfte  $N_x$  und  $N_{xy}$  ermittelt.

Gegeben ist eine Krag­scheibe mit  $E = 30000MN/m^2$ ,  $\nu = 0.16$  und der Einfachheit halber mit der Dicke  $t = 1m$ , siehe Abb.6.9. Es wird das bilineare Scheibenelement mit der Elementbreite  $a = 0.5m$  und der Elementhöhe  $b = 0.5m$  verwendet.

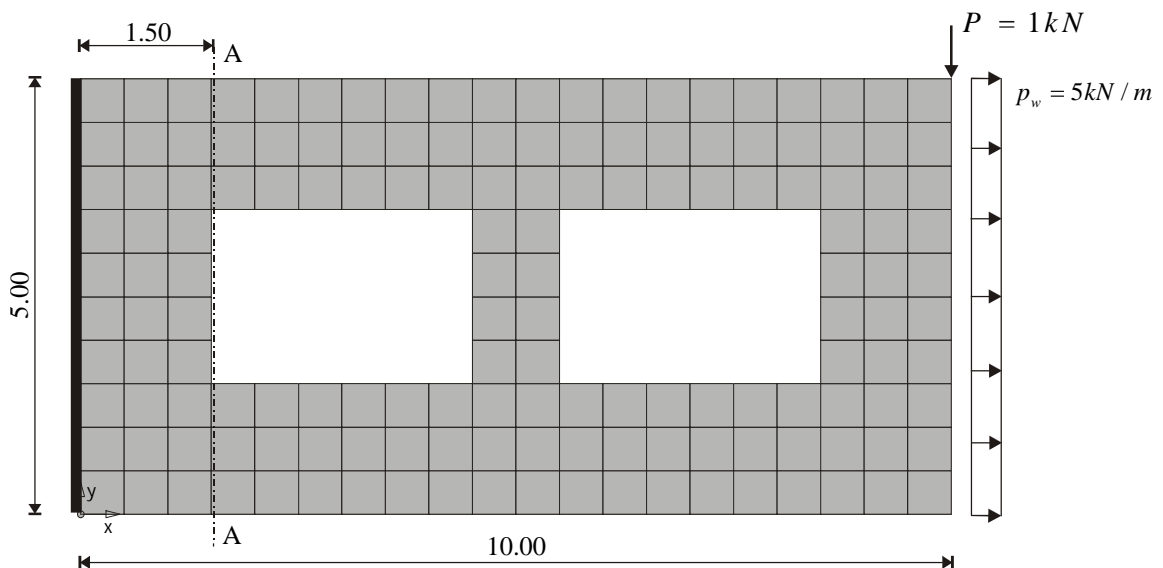
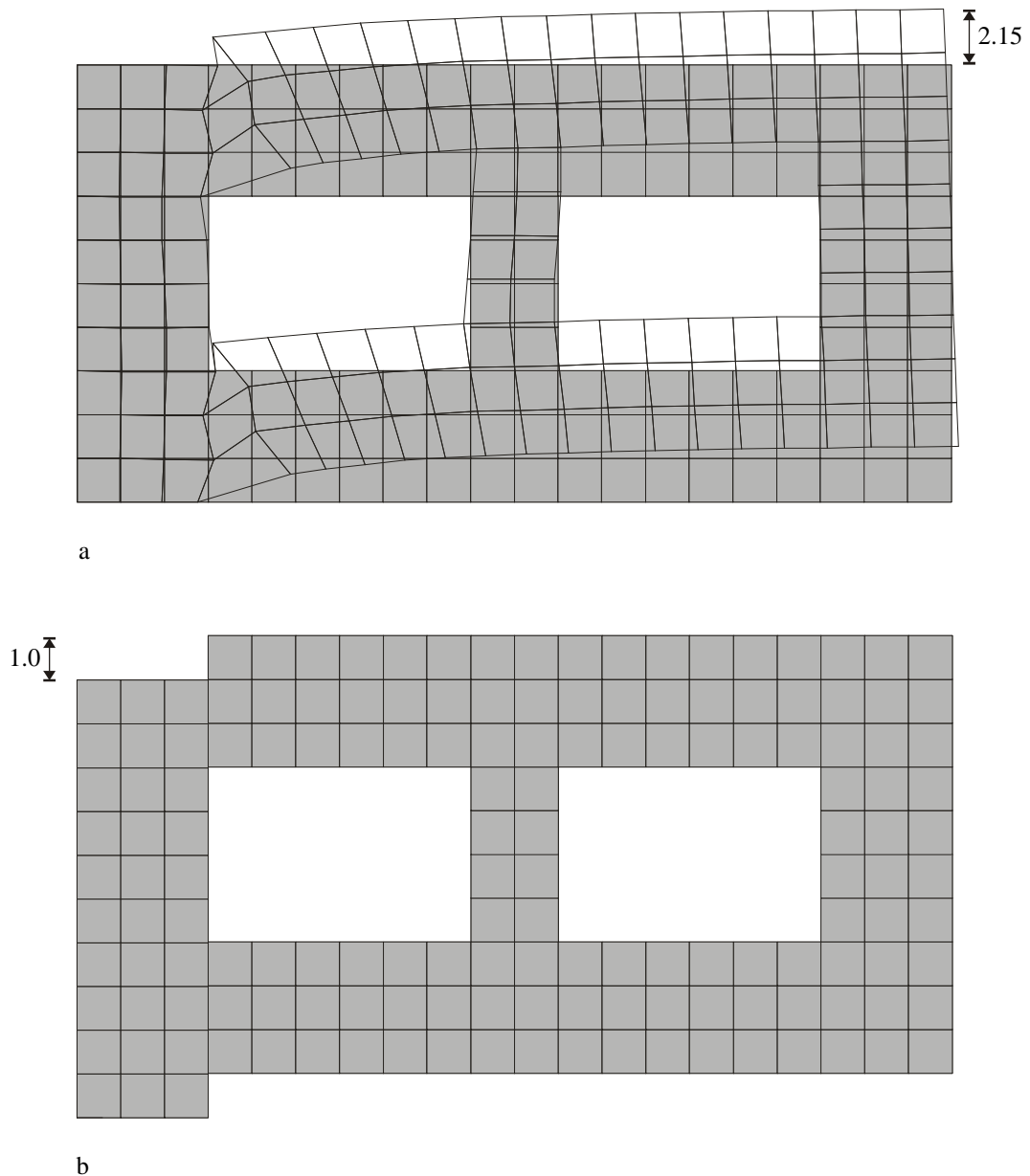


Abb. 6.9 Krag­scheibe, Abmessungen und Belastung



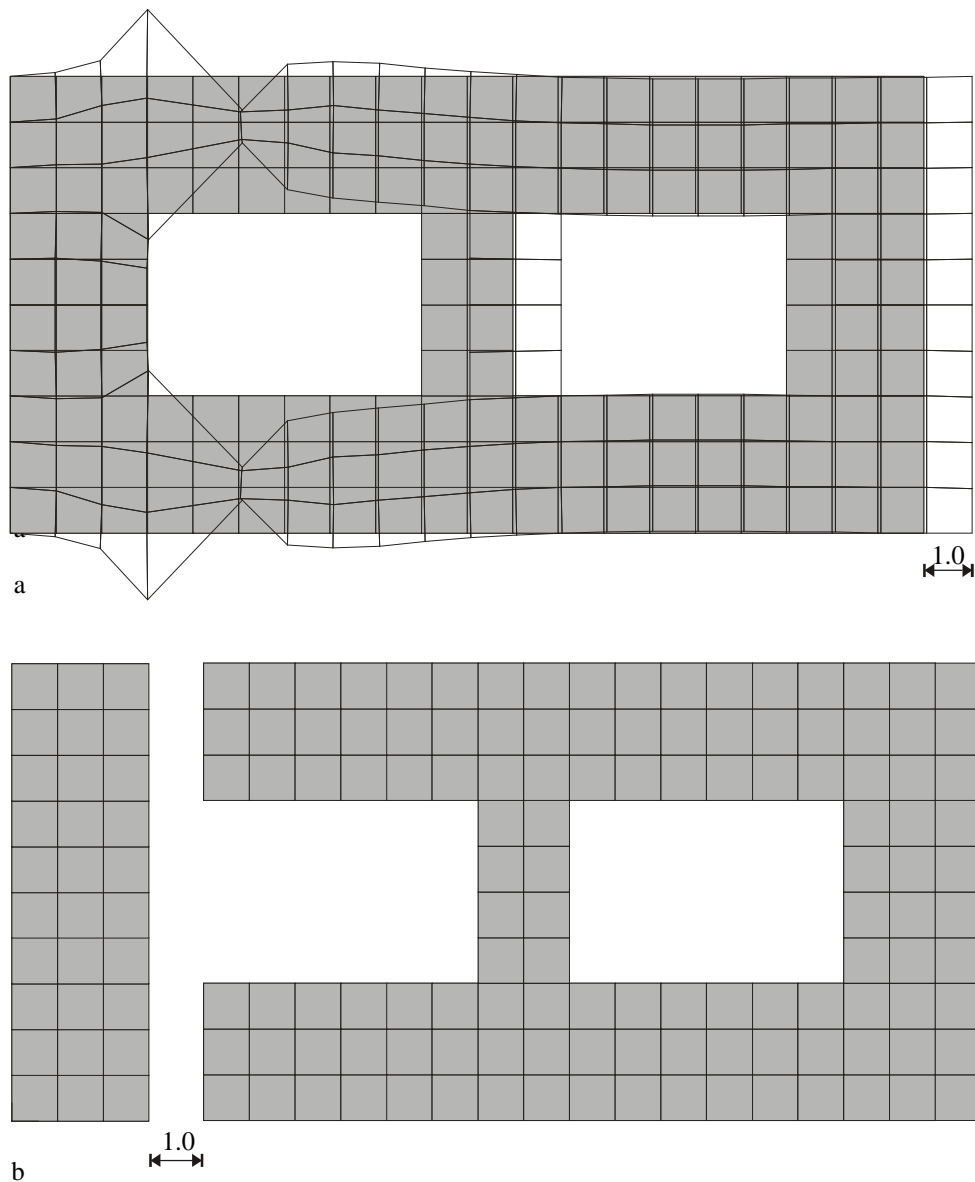
**Abb. 6.10** a) Einflussfunktion  $G_1^h$  für die vertikale Schnittkraft  $N_{xy}^h$  im Schnitt A-A, b) exakte Einflussfunktion für  $N_{xy}$

In Abb. 6.10 ist die Einflussfunktion für die Schnittkraft  $N_{xy}$  im Schnitt A-A dargestellt. Bei der FE-Näherung  $G_1^h$  beträgt die vertikale Verschiebung in der rechten oberen Ecke 2.15. Das bedeutet, dass von der Einzelkraft  $P = 1kN$  das 2.15-fache im Schnitt A-A ankommt. Eine Überprüfung dieses Lastfalls erbrachte eine genaue Übereinstimmung. Das Gleichgewicht in dem Schnitt ist also nicht erfüllt, da das FE-Programm die exakte Einflussfunktion,



den Versatz von Eins, nicht darstellen kann, siehe Abb. 6.10b. Diese Abweichung ist sehr groß und es lassen sich auch Schnitte finden, bei denen der Abstand zwischen der exakten und der genäherten Einflussfunktion nicht so groß ist. Aufgrund der Anschaulichkeit wurde jedoch ein extremes Beispiel gewählt.

Im Gegensatz dazu erhält man für die Schnittkraft  $N_x^h$  im Schnitt A-A ein sehr gutes Ergebnis, siehe Abb. 6.11. Die Abweichungen treten hier erst bei der dritten Nachkommastelle auf und werden der Einfachheit halber vernachlässigt.



**Abb. 6.11** a) Einflussfunktion  $G_1^h$  für die Schnittkraft  $N_x^h$  im Schnitt A-A, b) exakte Einflussfunktion für  $N_x$  im Schnitt A-A

Der Mittelwert aller Knotenverschiebungen in x-Richtung entlang der angreifenden Windlast beträgt 1.0. Die Schnittkraft  $N_x^h$  ergibt sich aus dem Produkt der resultierenden Windlast und der mittleren Verschiebung. Das Gleichgewicht im Schnitt A-A ist deshalb für den Lastfall  $p_w = 5KN/m$  erfüllt.

$$N_x^h = 1.0 \cdot 5.0 \cdot p_w = 25 kN = N_x$$

Das schlechte Ergebnis bei der Schnittkraft  $N_{xy}$  dürfte auf die Verwendung des bilinearen Scheibenelementes zurückzuführen sein. Dieses kann Biegeverformungen schlecht darstellen. Im Gegensatz dazu ist das Ergebnis bei  $N_x$  sehr gut, da das bilineare Element die zugehörige Einflussfunktion gut approximieren kann. Das Gleichgewicht in einem Schnitt hängt also stark davon ab, wie gut das Element Biegeverformungen darstellen kann.

Untersuchungen in [3] haben bei vergleichbaren Systemen unter Verwendung des Elementes von Wilson, Q4+2, deutlich bessere Ergebnisse geliefert. Dieses bestätigt die oben getroffene Aussage, da das Element von Wilson Biegezustände besser darstellen kann.

## 7 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurde gezeigt, dass bei der Berechnung mit finiten Elementen jede lokale und globale Weg- oder Kraftgröße aus dem Skalarprodukt der genäherten Greenschen Funktion und der Belastung bestimmt wird. Die Näherung der Greenschen Funktion ist hierbei die Projektion der echten Greenschen Funktion auf den FE-Ansatzraum  $V_h$ .

Diese bemerkenswerte Eigenschaft der finiten Elemente ermöglicht es, Aussagen über die Korrektheit von lokalen Spannungs- oder Verschiebungsgrößen zu machen. Die Güte der projizierten Greenschen Funktion stellt hierbei das Bewertungskriterium dar. Je besser das FE-Netz die echte Greensche Funktion approximieren kann, umso genauer sind die lokalen Größen. Infolge dessen ergeben sich auch neue Methoden, um die Ergebnisse zu verbessern. Bei den so genannten Dualitätstechniken wird das Netz gezielt an den Stellen verbessert, an denen das Programm die größten Schwierigkeiten hat, die Einflussfunktion darzustellen. Man versucht also, den Fehler zu minimieren, indem man den Abstand zwischen der echten und der genäherten Greenschen Funktion reduziert.

Die Komplexität der Greenschen Funktionen nimmt mit Höhe der Ableitung zu. Die Einflussfunktion für eine Verschiebung bei einer Scheibe ist die Verformungsfigur infolge einer Einzelkraft. Um jedoch die Einflussfunktion für eine Spannung zu erzeugen, muss ein Versatz realisiert werden. Die Darstellung der Greenschen Funktion für die Spannung ist auf dem Netz schwerer umzusetzen. Das bedeutet, dass in der Regel eine Verschiebungsgröße genauer ist als eine Spannungsgröße, da sich die Verschiebungsfigur infolge einer Einzelkraft leichter approximieren lässt.

Des Weiteren wurde anhand einiger Beispiele gezeigt, dass das Gleichgewicht in einem horizontalen oder vertikalen Schnitt in der Regel nicht erfüllt ist. Der Grund hierfür ist die

Näherung der Greenschen Funktion. Die exakte Greensche Funktion für eine Schnittkraft entspricht einem Versatz von Eins entlang des Schnittes. FE-Programme können jedoch Unstetigkeiten nicht darstellen und deshalb erhält man nur eine Näherung für die Versetzung von Eins.

Mit diesen Erkenntnissen erhält der Anwender von FE-Programmen die Möglichkeit, die Ergebnisse seiner numerischen Berechnung anhand der Güte der Greenschen Funktionen zu bewerten. Dies soll zu einer vernünftigen Ergebnisinterpretation beitragen.

Leider besteht zurzeit bei den meisten FE-Programmen nicht die Möglichkeit, Einflussfunktionen zu berechnen. Es wäre daher wünschenswert, dass auch große kommerzielle Softwareanbieter die Berechnung von Einflussfunktionen in ihre Programme aufnehmen. Die anschauliche Darstellung des Näherungscharakters der Methode der finiten Elemente sollte doch eigentlich Motivation genug hierfür sein. Die Berechnung von Einflussfunktionen gehört meiner Meinung nach in jedes FE-Programm.

In dieser Arbeit wurde die Berechnung von Einflussfunktionen für das Balkenelement und das bilineare Scheibenelement gezeigt. Nach der hier vorgestellten Methode lassen sich die Greenschen Funktionen für die unterschiedlichsten Strukturen berechnen. Der nächste Schritt wäre also, die Behandlung anderer Scheiben- und Plattenelemente und deren Implementierung in FE-Programme. Des Weiteren können mit dem Wissen über Greensche Funktionen die Techniken der adaptiven Verfahren weiter verbessert werden.

# Verzeichnis der verwendeten Symbole

In der vorliegenden Arbeit bezeichnen fette Großbuchstaben Matrizen und fette Kleinbuchstaben Vektoren. Im Folgenden werden nur Symbole aufgelistet, die nicht explizit in der Arbeit definiert sind.

## Allgemeine Symbole:

$E$	Elastizitätsmodul
$I$	Flächenträgheitsmoment 2.Grades
$n$	Querdehnzahl
$e$	Dehnung

## Mathematische Symbole:

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$C^m$	Raum der $m$ -fach stetig differenzierbaren Funktionen
$\in$	ist Element von
$\forall$	für alle (für jedes)
$:=$	definiert als

# Literaturverzeichnis

- [1] Bathe, K.-J.: Finite-Elemente-Methoden. Berlin Heidelberg: Springer 1990.
  
- [2] Grätsch, T., Hartmann, F.: Finite elements and Green's functions.  
In: K.J. Bathe (ed.): Computational Fluid and Solid Mechanics, Vol. 2. Elsevier: 2001.  
Seiten 1582-1585. (Proc. of the First MIT Conference on Computational Fluid and  
Solid Mechanics, Cambridge, MA, USA, 12-14 June 2001.)
  
- [3] Hartmann, F., Katz, C.: Statik mit finiten Elementen. Berlin Heidelberg: Springer 2002.
  
- [4] Hughes, T.J.R.: The Finite Element Method. Englewood Cliffs, New Jersey / USA:  
Prentice-Hall 1987.
  
- [5] Link, M.: Finite Elemente in der Statik und Dynamik. Stuttgart: B.G. Teubner 1989.
  
- [6] Mehlhorn, G.: Der Ingenieurbau, Band Rechenorientierte Baumechanik. Berlin: Ernst &  
Sohn 1995.
  
- [7] Meskouris K., Hake E.: Statik der Stabtragwerke. Berlin Heidelberg: Springer 1999.
  
- [8] Müller, G., Groth, C.: FEM für Praktiker. Renningen-Malmsheim: Expert 1997.