

# Goal-oriented recovery bei nichtlinearen Scheibenproblemen

Diplomarbeit

2.Studienstufe

im Fachbereich Bauingenieurwesen/Fachgebiet Baustatik  
der Universität Kassel

von

Daniel Materna

Februar 2004

Betreuer: Prof. Dr.-Ing. Friedel Hartmann  
Fachbereich Bauingenieurwesen / Fachgebiet Baustatik  
Universität Kassel

2. Prüfer: Prof. Dr.-Ing. Michael Link  
Fachbereich Bauingenieurwesen / Fachgebiet Leichtbau  
Universität Kassel

# Inhaltsverzeichnis

<b>Verzeichnis der Symbole</b>	<b>iii</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2 Die Grundgleichungen</b>	<b>4</b>
2.1 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen . . . . .	4
2.1.1 Gebiet und Rand . . . . .	4
2.1.2 Deformation und Verzerrung . . . . .	5
2.1.3 Gleichgewichtsaussagen . . . . .	6
2.1.4 Konstitutive Gleichungen . . . . .	7
2.2 Das Randwertproblem und die schwache Form . . . . .	9
2.2.1 Das Randwertproblem . . . . .	9
2.2.2 Schwache Form des Gleichgewichts . . . . .	11
2.2.3 Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts . . . . .	13
2.3 Die Methode der finiten Elemente . . . . .	14
2.3.1 Diskretisierung . . . . .	14
2.3.2 Das Galerkin-Verfahren . . . . .	15
2.3.3 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme . . . . .	16
2.4 Beispiel Zugstab . . . . .	17
<b>3 Lineare Probleme</b>	<b>22</b>
3.1 Das lineare Randwertproblem und die FE-Approximation . . . . .	22
3.1.1 Das Randwertproblem . . . . .	22
3.1.2 Greensche Identitäten . . . . .	23
3.1.3 Das Variationsproblem . . . . .	25

---

3.1.4	FE-Approximation und einige wichtige Eigenschaften . . . . .	26
3.2	Globale Fehlerschätzer für lineare Randwertprobleme . . . . .	29
3.2.1	Prinzipien der Fehlerschätzung . . . . .	29
3.2.2	Ein expliziter Fehlerschätzer . . . . .	32
3.2.3	$Z^2$ -Fehlerschätzer . . . . .	38
3.3	Einflussfunktionen und finite Elemente . . . . .	39
3.3.1	Greensche Funktionen . . . . .	40
3.3.2	Der Projektionssatz . . . . .	42
3.3.3	Verallgemeinerte Greensche Funktionen . . . . .	43
3.3.4	Berechnung von Greenschen Funktionen . . . . .	46
3.4	Zielorientierte Fehlerschätzer . . . . .	49
3.4.1	Darstellung des Fehlers . . . . .	49
3.4.2	Residuenbasierende zielorientierte Fehlerschätzer . . . . .	51
3.4.3	Zielorientierte Fehlerschätzer in der Energienorm . . . . .	53
3.4.4	Zusammenfassung . . . . .	55
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Probleme</b>	<b>57</b>
4.1	Vorbemerkungen . . . . .	57
4.2	Globale Fehlerschätzer . . . . .	58
4.3	Zielorientierte Fehlerschätzer . . . . .	61
4.3.1	Ein genereller Zugang . . . . .	62
4.3.2	Alternativen . . . . .	65
4.3.3	Berechnung des dualen Problems . . . . .	67
4.4	Adaptionsstrategien und Netzverfeinerung . . . . .	71
4.4.1	Netzverfeinerung . . . . .	72
4.4.2	Gesamtalgorithmus einer nichtlinearen adaptiven Berechnung	75
4.4.3	Datentransfer . . . . .	76
<b>5</b>	<b>Numerische Ergebnisse</b>	<b>78</b>
5.1	Eingespannte Scheibe . . . . .	78
5.2	Kragscheibe . . . . .	83
<b>6</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>89</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>91</b>

# Verzeichnis der Symbole

## Kontinuumsmechanik

$u$	Verschiebungsfeld
$x$	Ortsvektor eines Punktes in der verformten Konfiguration
$X$	Ortsvektor eines Punktes in der Ausgangskonfiguration
$\varphi$	Deformation
$F$	Deformationsgradient: $F = \nabla\varphi$
$E$	Green-Lagrangescher Verzerrungstensor
$\varepsilon$	linearer Verzerrungstensor
$t$	Cauchyscher Spannungsvektor
$\sigma$	Cauchyscher Spannungstensor
$P$	1. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$S$	2. Piola-Kirchhoffscher Spannungstensor
$C$	Materialtensor
$\lambda, \mu$	Lame Konstanten
$p$	Gebietslasten
$\bar{t}$	Randlasten
$n$	äußerer Normaleneinheitsvektor
$G(\cdot, \cdot)$	Erste Greensche Identität
$B(\cdot, \cdot)$	Zweite Greensche Identität
$\delta$	Dirac Delta
$G$	Greensche Funktion
$z$	verallgemeinerte Greensche Funktion

**Differentialgleichungen und finite Elemente**

$\mathbb{R}$	Menge der reellen Zahlen
$\Omega$	offene Menge im $\mathbb{R}^n$
$\Gamma$	Rand von $\Omega$ : $\Gamma = \partial\Omega$
$\Gamma_D$	Teil des Randes mit Dirichlet-Randbedingungen
$\Gamma_N$	Teil des Randes mit Neumann-Randbedingungen
$C^k(\Omega)$	Menge der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen
$L_2(\Omega)$	Raum der über $\Omega$ quadrat-integrierbaren Funktionen
$H^m(\Omega)$	Sobolev-Raum von $L_2$ Funktionen mit quadrat-integrierbaren Ableitungen bis zur Ordnung $m$
$\partial_i$	partielle Ableitung $\frac{\partial}{\partial x_i}$
$(\cdot, \cdot)$	Skalarprodukt
$a(\cdot, \cdot)$	Bilinearform
$a(\cdot; \cdot)$	Semilinearform, alle Argumente rechts vom Semikolon sind linear
$a_T(\cdot; \cdot, \cdot)$	Tangentenform, Gateaux-Ableitung von $a(\cdot; \cdot)$
$F(\cdot)$	Linearform, lineares Funktional
$J(\cdot)$	Funktional
$\mathbf{u}_h$	FE-Approximation des Verschiebungsfeldes
$\mathbf{z}_h$	FE-Approximation der verallgemeinerten Greenschen Funktion
$\mathbf{p}_h$	FE-Approximation der Gebietslasten
$\mathbf{t}_h$	FE-Approximation der Randlasten
$\mathbf{e}$	Verschiebungsfehler $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$
$\mathbf{e}^*$	Verschiebungsfehler des dualen Problems $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$
$\mathbf{K}_T(\mathbf{u})$	tangentiale Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{f}$	Vektor der äußeren Kräfte
$\mathbf{k}(\mathbf{u})$	Vektor der inneren Kräfte
$R(\cdot)$	Residuum des ursprünglichen Problems
$R^*(\cdot)$	Residuum des dualen Problems
$\mathbf{r}$	Gebietsresiduum $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$
$\mathbf{j}$	Randrediduum $\bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_h$
$\gamma$	Kante eines Elements
$\Gamma_e$	Rand eines Elements

# 1 Einleitung

In den letzten Jahrzehnten hat sich die Methode der finiten Elemente zu einem wirkungsvollen Werkzeug innerhalb des Ingenieurwesens und der angewandten Physik entwickelt. Mit ihrer Hilfe können die unterschiedlichsten Rand- und Anfangswertprobleme numerisch gelöst werden. Die Lösung dieser Probleme ist – bis auf wenige Ausnahmen – immer fehlerbehaftet. Die Fehler setzen sich hierbei unter anderem aus Diskretisierungsfehlern in Raum und Zeit, Geometriefehlern und Modellfehlern zusammen. Die Modellfehler resultieren durch die falsche Wahl des betrachteten Modells. Beispielsweise können die Fehler aus der Approximation eines dreidimensionalen Problems durch ein zweidimensionales Modell resultieren. Ferner stellt die falsche Wahl des Materialmodells eine erhebliche Fehlerquelle dar, da das tatsächliche Verhalten des betrachteten Materials nur unzureichend wiedergegeben wird. Im Rahmen dieser Arbeit soll die Betrachtung von Diskretisierungsfehler im Mittelpunkt stehen.

Da analytische Lösungen der gegebenen Probleme im Allgemeinen nicht bekannt sind, können die auftretenden Fehler nur abgeschätzt werden. In den letzten zwei Jahrzehnten wurden zahlreiche Strategien entwickelt, um die Diskretisierungsfehler abschätzen zu können und um innerhalb von adaptiven Verfahren das Netz derart zu optimieren, dass der globale Fehler unterhalb einer vorgegebenen Toleranz bleibt. Die Abschätzung des globalen Fehlers erfolgt in einer geeigneten Norm. Häufig wird hierfür die Energienorm verwendet, da dieser eine physikalische Bedeutung zugemessen werden kann und weil sie äquivalent zu den üblichen Sobolev-Normen ist.

Alle globalen Fehlerschätzer liefern Informationen über den globalen Fehler gemessen in einer geeigneten Norm, jedoch keine Aussagen über die Güte einzelner loka-

ler Werte, wie beispielsweise Verschiebungen oder Spannungen in einem bestimmten Punkt. Aus diesem Grund sind in der letzten Zeit Methoden entwickelt worden, welche gezielt den Fehler in einer lokalen *Zielgröße* abschätzen. Bei den so genannten *goal-oriented* oder *zielorientierten* Fehlerschätzer wird zusätzlich zum gegebenen Problem ein *duales* Problem formuliert und gelöst, weshalb diese Methoden auch als *Dualitätstechniken* bezeichnet werden. Die Motivation hierfür liefern die Greenschen Funktionen. Mit ihrer Hilfe lassen sich in der klassischen Statik lokale und globale Weg- oder Kraftgrößen berechnen. Es kann gezeigt werden, dass auch bei der Berechnung mit finiten Elementen jede lokale Größe mit Hilfe der zugehörigen Greenschen Funktion berechnet werden kann [18], [24]. Hierbei wird jedoch nicht mehr die exakte Greensche Funktion, sondern eine auf den aktuellen Ansatzraum projizierte Greensche Funktion verwendet, welche in der Regel nur eine Näherung darstellt. Der Fehler einer lokalen Größe ist damit direkt abhängig vom Approximationsfehler in der Greenschen Funktion, d.h. vom Abstand zwischen der echten Greenschen Funktion und der FE-Approximation der Greenschen Funktion. Bei linearen Problemen wurde diese Technik vielfach erfolgreich angewendet. Innerhalb von adaptiven Verfahren können Netze konstruiert werden, welche optimal bezüglich einer gesuchten lokalen Größe sind.

Bei nichtlinearen Problemen existieren keine Greenschen Funktionen im üblichen Sinn. Die Technik lässt sich jedoch auch auf nichtlineare Probleme übertragen. Hierbei wird das duale Problem für das linearisierte ursprüngliche Problem formuliert und gelöst. In der vorliegenden Arbeit soll nun diese Technik vorgestellt werden.

## Gliederung der Arbeit

In **Kapitel 2** werden zunächst einige kontinuumsmechanische Grundlagen angegeben. Ausgehend vom Randwertproblem der nichtlinearen Elastizitätstheorie wird die zugehörige schwache Formulierung sowie deren Linearisierung hergeleitet. Anhand eines einfachen Beispiels wird abschließend die Vorgehensweise zur Lösung nichtlinearer Probleme veranschaulicht.

In **Kapitel 3** werden zunächst die bereits schon klassischen Fehlerschätzer für lineare Probleme vorgestellt. Als Modellproblem dient hierbei das Randwertproblem der



linearen Elastizitätstheorie. Anschließend werden die zielorientierten Fehlerschätzern für lineare Probleme motiviert und diskutiert.

In **Kapitel 4** werden Fehlerschätzer für nichtlineare Probleme vorgestellt. Die zielorientierten Fehlerschätzer werden ganz allgemein auf nichtlineare Probleme übertragen. Abschließend erfolgt dann ein kurzer Blick auf Adaptionstrategien und praktische Aspekte innerhalb einer nichtlinearen adaptiven FE-Berechnung.

In **Kapitel 5** soll anhand einiger numerischer Beispiele die hier gezeigte Technik veranschaulicht werden.

In **Kapitel 6** erfolgen dann abschließend eine Zusammenfassung und ein kurzer Ausblick.

## **Implementierung in ein FE-Programm**

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die hier vorgestellte Technik für ein geometrisch nichtlineares Scheibenelement mit bilinearen Ansätzen umgesetzt. Das Ganze wurde hierbei in das Programm WINFEM implementiert, ein FE-Programm zur Berechnung von Scheibenproblemen, welches im Fachgebiet Baustatik der Universität Kassel entwickelt wurde.

Folgende Punkte wurden realisiert:

- Berechnung des äquivalenten FE-Lastfalls für das geometrisch nichtlineare Scheibenelement mit bilinearen Ansätzen.
- Einbindung eines adaptiven Verfahrens in den nichtlinearen Lösungsalgorithmus.
- Implementierung der zielorientierten Fehlerschätzung für das oben genannte nichtlineare Element.

Das Programm sowie der gesamte Quellcode sind auf der beiliegenden CD-ROM enthalten. Weitere Informationen zu WINFEM findet man auch auf den Internetseiten des Fachgebietes Baustatik der Universität Kassel.

## 2 Die Grundgleichungen

Im vorliegenden Kapitel werden die Grundgleichungen eingeführt, welche im Rahmen dieser Arbeit Verwendung finden. Ausgehend vom Randwertproblem der nichtlinearen Elastizitätstheorie wird die zugehörige Variationsformulierung sowie die zur numerischen Lösung erforderliche Linearisierung angegeben. Ferner werden die entstehenden Gleichungen mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode in diskrete Gleichungen überführt. Abschließend wird die prinzipielle Vorgehensweise bei nichtlinearen Problemen an einem einfachen Beispiel veranschaulicht.

### 2.1 Kontinuumsmechanische Grundgleichungen

Im Folgenden werden einige kontinuumsmechanische Grundgleichungen angegeben. Auf die Herleitung wird dabei weitestgehend verzichtet. Ausführliche Darstellungen findet man beispielsweise in [10], [39], [44].

#### 2.1.1 Gebiet und Rand

Ein Gebiet  $\Omega$  bezeichnet im Folgenden eine offene, beschränkte und zusammenhängende Teilmenge des  $\mathbb{R}^n$  mit dem Rand  $\Gamma$ . Die Vereinigung von Gebiet und Rand ist mit

$$\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma \tag{2.1}$$

definiert. Der Rand  $\Gamma$  soll die Lipschitz-Stetigkeit erfüllen, da dann entlang des Randes ein eindeutiger äußerer Normaleneinheitsvektor existiert, d.h. ein Vektor  $\mathbf{n} = n_i e_i$  mit  $|\mathbf{n}| = 1$ , welcher aus dem Inneren von  $\bar{\Omega}$  in die Umgebung zeigt. Ferner kann der Rand  $\Gamma$  in einen Dirichlet-Anteil  $\Gamma_D$  und einen Neumann-Anteil  $\Gamma_N$  zerlegt werden.

$$\Gamma = \Gamma_D + \Gamma_N \quad (2.2)$$

Auf  $\Gamma_N$  sind Spannungsrandbedingungen in Form von Belastungen  $\bar{\mathbf{t}}$  und auf  $\Gamma_D$  Verschiebungsrandbedingungen  $\bar{\mathbf{u}}$  vorgeschrieben.

### 2.1.2 Deformation und Verzerrung

Bei einer Deformation ändert ein Körper seine Form und seine Lage. Die Deformation ist eine Abbildung  $\varphi$  der vom Körper eingenommenen Teilmenge  $\Omega$  auf die Bildmenge  $\varphi(\Omega)$ .

$$\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet man die Urbildmenge  $\Omega$  als Referenzkonfiguration oder undeformierte Konfiguration. Die Bildmenge  $\varphi(\Omega)$  ist die deformierte Konfiguration.

Für einen Punkt  $\mathbf{X} \in \Omega$  bezeichnet  $\mathbf{x} := \varphi(\mathbf{X}) \in \varphi(\Omega)$  den entsprechenden Punkt in der deformierten Konfiguration. Die Bewegung des Körpers ist eine Folge von Konfigurationen  $\varphi_t : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ . Für den Ort des Punktes  $\mathbf{X}$  zur Zeit  $t$  gilt

$$\mathbf{x} = \varphi_t(\mathbf{X}) = \varphi(\mathbf{X}, t). \quad (2.4)$$

Der Verschiebungsvektor  $\mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  wird als Differenz der Ortsvektoren der Momentan- und Ausgangskonfiguration eingeführt

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) := \varphi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X}. \quad (2.5)$$

Zur lokalen Beschreibung des Deformationsprozesses führt man den *Deformationsgradient*  $\mathbf{F}$  ein. Dieser ist definiert durch

$$\mathbf{F} := \nabla \varphi = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}}. \quad (2.6)$$

Mit  $\varphi(\mathbf{X}, t) = \mathbf{x} = \mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)$  lässt sich der Deformationsgradient auch folgendermaßen darstellen:

$$\mathbf{F} = \nabla\varphi = \nabla(\mathbf{X} + \mathbf{u}(\mathbf{X}, t)) = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u} \quad (2.7)$$

Die Deformation eines Körpers muss eine eindeutige (umkehrbar eindeutige) Abbildung von  $\Omega$  auf  $\varphi(\Omega)$  sein. Hieraus folgt, dass  $\mathbf{F}$  nicht singulär sein darf. Dies bedeutet, dass die zugehörige *Jacobi-Determinante*  $J$  der Bedingung

$$J = \det\mathbf{F} \neq 0 \quad (2.8)$$

genügen muss. Ferner ist zu fordern, dass  $J > 0$  ist, um Selbstdurchdringungen eines Körpers auszuschließen.

Als Verzerrungsmaß wird der *Green-Lagrangesche* Verzerrungstensor

$$\mathbf{E} := \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I}) \quad (2.9)$$

eingeführt, welcher auf die Referenzkonfiguration bezogen ist. Mit der Definition des Deformationsgradienten  $\mathbf{F} = \mathbf{I} + \nabla\mathbf{u}$ , lässt sich dieser darstellen als

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T + \nabla\mathbf{u}^T\nabla\mathbf{u}). \quad (2.10)$$

Im Bereich kleiner Verschiebungen können aufgrund der infinitesimalen Verschiebungsableitungen die quadratischen Glieder vernachlässigt werden und der Green-Lagrangesche Verzerrungstensor geht in den linearisierten Verzerrungstensor über

$$\boldsymbol{\varepsilon} := \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T). \quad (2.11)$$

### 2.1.3 Gleichgewichtsaussagen

Auf eine Struktur wirken verschiedene Arten äußerer Kräfte. Dies sind Volumenkräfte  $\mathbf{p}$  in  $\Omega$  und Flächenkräfte  $\bar{\mathbf{t}}$  auf  $\Gamma_N$ . Ferner wirken auf die Struktur noch Trägheitskräfte  $\rho\ddot{\mathbf{x}}$ . Diese werden jedoch im Rahmen dieser Arbeit vernachlässigt, da ausschließlich statische (zeitunabhängige) Probleme betrachtet werden. Nach dem Gleichgewichtsprinzip müssen alle auf eine Struktur wirkenden äußeren Kräfte verschwinden

$$\int_{\Gamma} \bar{\mathbf{t}} ds + \int_{\Omega} \mathbf{p} d\Omega = 0. \quad (2.12)$$

Nach dem *Cauchy Theorem*

$$\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad (2.13)$$

kann der Spannungsvektor  $\mathbf{t}$  auf jedem Punkt des Randes aus dem *Cauchy*-Spannungstensor  $\boldsymbol{\sigma}$  und dem äußeren Normalenfeld  $\mathbf{n}$  berechnet werden. Nach Einsetzen in (2.12) und unter Anwendung des Divergenztheorems erhält man die lokale Gleichgewichtsbedingung in der Momentankonfiguration

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p}) d\Omega = 0. \quad (2.14)$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{p} &= 0 && \text{in } \Omega \\ \mathbf{u} &= \bar{\mathbf{u}} && \text{auf } \Gamma_D \\ \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} &= \bar{\mathbf{t}} && \text{auf } \Gamma_N \end{aligned} \quad (2.15)$$

Die Cauchy-Spannungen  $\boldsymbol{\sigma}$  in (2.15) beschreiben den Spannungszustand in der Momentankonfiguration  $\varphi(\Omega)$ , d.h. in dem noch zu bestimmenden Zustand. Durch Einführung des *1. Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensors  $\mathbf{P} = J \boldsymbol{\sigma} \mathbf{F}^{-T}$  kann die Gleichgewichtsbedingung auf die Referenzkonfiguration bezogen werden:

$$\operatorname{div} \mathbf{P} + \mathbf{p} = 0 \quad (2.16)$$

Da  $\mathbf{P}$  unsymmetrisch ist, wird zweckmäßigerweise ein neuer Spannungstensor eingeführt. Der so genannte *2. Piola-Kirchhoffsche* Spannungstensor  $\mathbf{S} = \mathbf{F}^{-1} \mathbf{P}$  entsteht durch die vollständige Rücktransformation des *Cauchy* Spannungstensors auf die Referenzkonfiguration und ist symmetrisch. Mit  $\mathbf{P} = \mathbf{F} \mathbf{S} = (\mathbf{I} + \nabla \mathbf{u}) \mathbf{S}$  folgt aus (2.16)

$$\operatorname{div} (\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) + \mathbf{p} = 0. \quad (2.17)$$

## 2.1.4 Konstitutive Gleichungen

Um ein Randwertproblem vollständig lösen zu können, werden zusätzlich zu Spannungs- und Verzerrungsgrößen noch Materialgleichungen benötigt. In der Kontinuumsmechanik werden diese Gleichungen auch als konstitutive Gleichungen bezeichnet.

Im Rahmen dieser Arbeit wird das *St. Venant-Kirchhoff-Material* betrachtet. Dieses Materialmodell beschreibt ein linear elastisches Material, welches temperaturunabhängig, homogen und isotrop ist. In Bezug auf die Referenzkonfiguration wird das Materialgesetz zwischen dem zweiten *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensor  $\mathbf{S}$  und dem *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  gebildet, wobei vorausgesetzt wird, dass eine (ausreichend oft differenzierbare) Formänderungsenergiefunktion  $W = \hat{W}(\mathbf{E}(\mathbf{u}))$  existiert, welche der materiellen Objektivität<sup>1</sup> genügt.

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] \quad (2.18)$$

Der Materialtensor  $\mathbf{C}$  wird durch partielle Ableitung der Spannungen nach dem Green-schen Verzerrungstensor gebildet

$$\mathbf{C} = \frac{\partial^2 W}{\partial \mathbf{E} \partial \mathbf{E}} = \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial \mathbf{E}}. \quad (2.19)$$

Die konstitutive Gleichung des *St. Venant-Kirchhoff* Materials lautet

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu \mathbf{E} + \lambda(\text{sp } \mathbf{E}) \mathbf{I}. \quad (2.20)$$

Hierbei bezeichnen

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad \text{und} \quad \lambda = \frac{E\nu}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}. \quad (2.21)$$

die Lamé Konstanten, welche experimentell bestimmt werden können. Für den Fall kleiner Verschiebungen gilt die obige Beziehung auch für die Cauchy-Spannungen und den linearisierten Verzerrungstensor (2.11)

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}[\boldsymbol{\varepsilon}] = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon} + \lambda(\text{sp } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{I}. \quad (2.22)$$

**Bemerkung 2.1** Die Anwendbarkeit dieses Materialmodells beschränkt sich auf große Verschiebungen und kleine Verzerrungen. Trotz der linearen Beziehung zwischen dem zweiten *Piola-Kirchhoffschen* Spannungstensor und dem *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensor bleibt die geometrische Nichtlinearität vollständig erhalten.

<sup>1</sup>Das Prinzip der materiellen Objektivität besagt, dass die konstitutiven Gleichungen unabhängig vom Bewegungszustand des Beobachters sein müssen [39].

## 2.2 Das Randwertproblem und die schwache Form

### 2.2.1 Das Randwertproblem

Ausgangspunkt für die Berechnung von Randwertproblemen mit hyperelastischen Materialien ist das gekoppelte System von partiellen Differentialgleichungen, bestehend aus den kinematischen Beziehungen (2.10), dem Materialgesetz (2.18) und der lokalen Gleichgewichtsbedingung (2.17):

$$\begin{aligned}\mathbf{E} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \\ \mathbf{S} &= \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}\end{aligned}\quad (2.23)$$

$$-\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) = \mathbf{p}$$

mit den Verschiebungsrandbedingungen  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  auf  $\Gamma_D$  und den Spannungsrandbedingungen  $\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}}$  auf dem komplementären Rand  $\Gamma_N$ . Hierbei bezeichnet

$$\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) := (\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) \mathbf{n} \quad (2.24)$$

den Spannungsvektor auf einem Punkt des Randes und  $\mathbf{n}$  den nach außen gerichteten Normalenvektor.

Das obige Problem (2.23) kann durch Einsetzen der Spannungen und Verzerrungen in die Gleichgewichtsbedingung in ein Problem überführt werden, welches nur noch von den Verschiebungen abhängt. Bei Verwendung des *St. Venant-Kirchhoff*-Materials

$$\mathbf{S} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}} = \mathbf{C}[\mathbf{E}] = 2\mu \mathbf{E} + \lambda (\operatorname{tr} \mathbf{E}) \mathbf{I} \quad (2.25)$$

lassen sich die 2. *Piola-Kirchhoffschen* Spannungen in Abhängigkeit von der Deformation  $\mathbf{u}$  angeben:

$$\begin{aligned}\mathbf{S}(\mathbf{u}) &:= \mu (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) + \lambda (\operatorname{tr} \nabla \mathbf{u}) \mathbf{I} \\ &+ \mu (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})) \mathbf{I}\end{aligned}\quad (2.26)$$

Durch Einsetzen von  $\mathbf{S}(\mathbf{u})$  in die Gleichgewichtsbedingung  $-\operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla \mathbf{u} \mathbf{S}) = \mathbf{p}$  lässt sich das Randwertproblem nun folgendermaßen formulieren: Finde ein  $\mathbf{u} \in C^2$ , welches die nichtlineare Gleichung

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{p} \quad \text{in } \Omega \quad (2.27)$$

und die zugehörigen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_N$$

erfüllt.

Der nichtlineare Differentialoperator  $\mathbf{A} = (A_i)$  ist hierbei definiert durch

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{u}) := & - [\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}] - \operatorname{div} \left[ \mu (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \right. \\ & + \frac{1}{2} \lambda (\operatorname{tr} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})) \mathbf{I} + \mu \nabla \mathbf{u} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) \\ & + \lambda \nabla \mathbf{u} (\operatorname{tr} \nabla \mathbf{u}) + \mu \nabla \mathbf{u} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u}) \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda \nabla \mathbf{u} (\operatorname{tr} (\nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{u})) \mathbf{I} \right]. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Jedes  $\mathbf{u} \in C^{2m}(\Omega)$ , welches die Differentialgleichung (2.27) und die zugehörigen Randbedingungen in jedem Punkt  $\mathbf{x} \in \Omega$  erfüllt, bezeichnet man als starke Lösung des Randwertproblems. Hierbei bezeichnet  $2m$  die Ordnung der Differentialgleichung. Sie entspricht der höchsten vorkommenden Ableitungsstufe von  $\mathbf{u}$ . Im vorliegenden Fall ist  $2m = 2$ , d.h. es handelt sich um eine Differentialgleichung 2. Ordnung.

**Bemerkung 2.2** Bei Verwendung von linearen Materialgesetzen, wie dem *St. Venant-Kirchhoff*-Material, können folgende Bemerkungen gemacht werden:

- Der erste Term  $[\cdot]$  der rechten Seite von (2.28) repräsentiert den linearen Anteil der Differentialgleichung und entspricht genau der Laméschen Verschiebungsdifferentialgleichung der linearen Elastizitätstheorie, siehe Kapitel 3.1.1 Gl. (3.5).



- Mit der Definition der 1. Piola-Kirchhoffschen Spannungen  $\mathbf{P} = \mathbf{F}\mathbf{S} = \mathbf{S} + \nabla\mathbf{u}\mathbf{S}$  erkennt man an (2.28), dass die einzelnen Komponenten von  $\mathbf{P}(\mathbf{u})$  Polynome 3. Grades in den partiellen Ableitungen von  $\mathbf{u}$  enthalten.
- Für den Beweis der Existenz der Lösung müssen die Lamé Konstanten die Ungleichungen  $\mu > 0$  und  $\lambda > -\frac{2}{3}\mu$  erfüllen, vgl. CIARLET in [10].

## 2.2.2 Schwache Form des Gleichgewichts

Abgesehen von einigen Spezialfällen ist eine analytische Lösung des Randwertproblems (2.27) im Allgemeinen nicht möglich. Um dennoch Lösungen für gegebene Probleme finden zu können, wird der Begriff der schwachen Lösung eingeführt. Dazu überführt man das Randwertproblem in eine formal äquivalente schwache Formulierung.

Zur Herleitung einer schwachen Formulierung wird (2.27) skalar mit einer vektorwertigen Testfunktion  $\mathbf{v} = (v_i)$  multipliziert. Es sei hierbei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit Lipschitz-stetigen Rand und  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in C^2 \times C^1$ . Ferner sei  $\mathbf{v} = 0$  auf  $\Gamma_D$ . Die Integration über das gesamte Gebiet ergibt dann

$$\int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (2.29)$$

Partielle Integration des linken Terms und Anwendung des Divergenztheorems liefert

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{A}(\mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(\mathbf{S} + \nabla\mathbf{u}\mathbf{S}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{S} + \nabla\mathbf{u}\mathbf{S}) \cdot \nabla\mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Aufgrund der Symmetrie von  $\mathbf{S}$  gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{S} + \nabla\mathbf{u}\mathbf{S}) \cdot \nabla\mathbf{v} &= (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})\mathbf{S} \cdot \nabla\mathbf{v} = \mathbf{S} \cdot (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} \\ &= \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} [(\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})^T \nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T (\mathbf{I} + \nabla\mathbf{u})] \\ &= \mathbf{S} \cdot \frac{1}{2} (\nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T + \nabla\mathbf{u}^T \nabla\mathbf{v} + \nabla\mathbf{v}^T \nabla\mathbf{u}) \\ &= \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_u(\mathbf{v}). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Der hierbei entstehende Tensor

$$\mathbf{E}_u(\mathbf{v}) := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T + \nabla \mathbf{u}^T \nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T \nabla \mathbf{u}) \quad (2.32)$$

ist gerade das Gateaux Differential

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} = \mathbf{E}_u(\mathbf{v}) \quad (2.33)$$

des Tensors  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$ , d.h.  $\mathbf{E}_u(\mathbf{v})$  bezeichnet die Variation des *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensors, vgl. [22].

Nach dem Zusammenfassen der obigen Beziehungen und Einarbeitung der Spannungsrandbedingungen  $\mathbf{t}(\mathbf{S}, \mathbf{u}) = \bar{\mathbf{t}}$  erhält man die schwache Form des Gleichgewichts

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_u(\mathbf{v}) d\Omega}_{\delta A_i} - \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds}_{\delta A_a} = 0. \quad (2.34)$$

Diese Formulierung bezeichnet man auch als erste *Greensche Identität* oder als *Prinzip der virtuellen Verschiebungen*, wo ja bekanntlich gilt:  $\delta A_i - \delta A_a = 0$ .

Für die virtuelle innere Arbeit wird die Bezeichnung

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := (\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{E}_u(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_u(\mathbf{v}) d\Omega \quad (2.35)$$

und für die virtuelle äußere Arbeit die Bezeichnung

$$F(\mathbf{v}) := (\mathbf{p}, \mathbf{v}) + (\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} ds \quad (2.36)$$

eingeführt. Hierbei ist  $a(\cdot; \cdot)$  eine Semilinearform, d.h. linear im zweiten Argument und  $F(\cdot)$  eine Linearform. Als Lösungs- und Testraum dient der Sobolev-Raum

$$V := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}. \quad (2.37)$$

Das zum Randwertproblem (2.27) gehörige Variationsproblem lautet dann: Finde ein  $\mathbf{u} \in V$ , welches die nichtlineare Variationsgleichung

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (2.38)$$

erfüllt.

Die Lösung dieser Variationsgleichung bezeichnet man als *schwache* Lösung des Randwertproblems. Jede starke Lösung  $\mathbf{u} \in C^{2m}(\Omega)$  von (2.27) ist auch eine schwache Lösung. Genügt umgekehrt ein  $\mathbf{u} \in C^{2m}(\Omega)$  für jedes beliebige  $\mathbf{v} \in C^m(\Omega)$  der schwachen Form, dann ist es auch eine Lösung des Randwertproblems, vgl. [18]. Fordert man andererseits nur  $\mathbf{u} \in C^m(\Omega)$ , dann gibt es noch schwache Lösungen, selbst wenn keine starken Lösungen mehr existieren.

### 2.2.3 Linearisierung der schwachen Form des Gleichgewichts

Zur Lösung nichtlinearer Problemstellungen ist eine Linearisierung der betrachteten Gleichungen nötig. Die Lösung von nichtlinearen Problemen erhält man dann durch die Lösung mehrerer linearer Probleme innerhalb eines iterativen Algorithmus, wie z.B. dem *Newton-Raphson*-Verfahren. Die Linearisierung erfolgt durch eine Entwicklung in eine Taylor-Reihe an einem bekannten Deformationszustand  $\bar{\mathbf{u}}$ . In diesem Deformationszustand herrscht Gleichgewicht.

Die formale Linearisierung der schwachen Form (2.34) lautet :

$$\mathcal{L}[G(\mathbf{u}, \mathbf{v})]_{\mathbf{u}=\bar{\mathbf{u}}} = G(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) + \mathcal{D}G(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_\Delta + \mathcal{R} \quad (2.39)$$

Der Rest  $\mathcal{R}$  enthält Terme höherer Ordnung und kann in der Regel vernachlässigt werden. Die Linearisierung der schwachen Form (2.34) beschränkt sich auf die virtuelle innere Arbeit

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_\mathbf{u}(\mathbf{v}) \, d\Omega, \quad (2.40)$$

da alle anderen Terme von der Deformation unabhängig sind. Dies setzt voraus, dass die Belastung deformationsunabhängig ist (konservative Kräfte). Die Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit in Richtung des Verschiebungsinkrementes  $\mathbf{u}_\Delta$  an der Stelle  $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$  ist das Gateaux Differential

$$\begin{aligned} a_T(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_\Delta, \mathbf{v}) &:= \mathcal{D}G(\bar{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) \cdot \mathbf{u}_\Delta = \left[ \frac{d}{d\varepsilon} a(\bar{\mathbf{u}} + \varepsilon \mathbf{u}_\Delta, \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\Omega} [\nabla \mathbf{u}_\Delta \mathbf{S} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{E}_\mathbf{u}(\mathbf{v}) \cdot \mathbf{C}[\mathbf{E}_\mathbf{u}(\mathbf{u}_\Delta)]] \, d\Omega. \end{aligned} \quad (2.41)$$

Abschließend lässt sich mit Hilfe von (2.36) die Linearisierung der schwachen Form folgendermaßen anschreiben

$$a(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) + a_T(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_\Delta, \mathbf{v}) = 0 \quad (2.42)$$

bzw.

$$a_T(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_\Delta, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{v}). \quad (2.43)$$

## 2.3 Die Methode der finiten Elemente

Im Rahmen der Methode der finiten Elemente finden verschiedene Approximationen statt. Ein Teil ist hierbei die Diskretisierung des betrachteten Gebietes. Ziel ist es, das Gebiet durch finite Elemente so gut wie möglich anzunähern. Ein zweiter Teil besteht in der Approximation der Feldgrößen, wie Verschiebungen, Spannungen etc.

### 2.3.1 Diskretisierung

Die Diskretisierung des Gebietes  $\bar{\Omega}$  erfolgt durch die Unterteilung des Gebietes in einfach zu beschreibende Teilgebiete, die finiten Elemente  $\Omega_e$ :

$$\Omega \approx \Omega_h := \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} \Omega_e \quad (2.44)$$

Der Rand  $\Gamma_e = \partial\Omega_e$  eines finiten Elementes  $\Omega_e$  setzt sich aus Kanten (2D) oder Flächen (3D) zusammen, welche im Folgenden mit  $\gamma(\Omega_e)$  bezeichnet werden. Damit lässt sich die Menge aller Kanten bzw. Flächen darstellen als

$$\Gamma_h = \bigcup_{\gamma \in \Gamma_h} \gamma(\Omega_e). \quad (2.45)$$

Das durch die Diskretisierung entstehende FE-Netz muss zulässig sein, d.h. folgende Eigenschaften müssen erfüllt werden:

1.  $\bar{\Omega} = \bigcup_{\Omega_e \in \Omega_h} \Omega_e$ .

2. Alle  $\Omega_e$  müssen ein positives Volumen besitzen.
3. Zwei Elemente  $\Omega_e$  dürfen sich entweder in einem gemeinsamen Punkt, einer gemeinsamen Kante, einer gemeinsamen Fläche oder gar nicht schneiden.

### 2.3.2 Das Galerkin-Verfahren

Zur numerischen Lösung des stetigen schwachen Problems (2.38)

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V$$

wird dieses in ein diskretes Problem überführt. Die als *Galerkin-Verfahren* bekannte Diskretisierung dieser Gleichung besteht nun darin, sie nicht mehr im unendlich dimensionalen Raum  $V$ , sondern im endlich dimensionalen Teilraum  $V_h \subset V$  zu lösen. Für die Näherungslösung  $\mathbf{u}_h$  gilt daher  $\mathbf{u}_h \in V_h \subset V$ . Das zum stetigen Variationsproblem (2.38) gehörige diskrete Variationsproblem lautet dann: Finde ein  $\mathbf{u}_h \in V_h$ , welches die Gleichung

$$a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V \quad (2.46)$$

erfüllt.

Im Rahmen des Galerkin-Verfahrens können prinzipiell unterschiedliche Ansatz- und Testfunktionen verwendet werden. Hieraus resultieren jedoch unsymmetrische Systemmatrizen, was einen erhöhten numerischen Aufwand nach sich zieht. Im Rahmen dieser Arbeit wird ausschließlich das *Bubnov-Galerkin-Verfahren* angewandt, bei dem für die Ansatz- und Testfunktionen dieselben Funktionen verwendet werden.

Die FE-Diskretisierung erfolgt durch Einführung der FE-Approximation für  $\mathbf{u}$ :

$$\mathbf{u}_h = \sum_{i=1}^{DOF} u_i \phi_i(\mathbf{x}). \quad (2.47)$$

Hierbei bezeichnet  $\phi_i(\mathbf{x})$  die Einheitsverschiebungsfelder der Freiheitsgrade  $u_i$ , welche im Fall einer Scheibe die Form

$$\phi_1 = \begin{bmatrix} \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \phi_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad \phi_3 = \begin{bmatrix} \phi_2 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots \quad (2.48)$$

besitzen. Wählt man als Testfunktion  $\mathbf{v}_h = \phi_i \in V_h$ , so folgt für (2.46)

$$\underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{E}_u(\phi_i) d\Omega}_{k_i} = \underbrace{\int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \phi_i d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \phi_i ds}_{f_i} \quad (2.49)$$

bzw. nach Assemblierung aller Elemente

$$\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}. \quad (2.50)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{k}(\mathbf{u})$  den Vektor der inneren Kräfte und der Vektor  $\mathbf{f}$  erfasst alle auf die Struktur wirkenden äußeren Kräfte. Die Struktur befindet sich im Gleichgewicht, wenn  $\mathbf{k}(\mathbf{u}) = \mathbf{f}$ . Diese Beziehung ist immer noch nichtlinear in  $\mathbf{u}$ .

Zur numerischen Lösung wird nun die linearisierte Gleichung (2.43)

$$a_T(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{u}_{\Delta}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\bar{\mathbf{u}}; \mathbf{v})$$

diskretisiert. Dies führt auf das lineare Gleichungssystem

$$\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}}) \mathbf{u}_{\Delta} = \mathbf{f} - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}}) \quad (2.51)$$

zur Bestimmung des Verschiebungskrements  $\mathbf{u}_{\Delta}$ , wobei  $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}})$  als tangentialsteifigkeitsmatrix bezeichnet wird. Sowohl  $\mathbf{K}_T(\bar{\mathbf{u}})$  als auch  $\mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}})$  sind am betrachteten Linearisierungspunkt  $\bar{\mathbf{u}}$  auszuwerten. Ausführliche Darstellungen zur Bestimmung dieser Größen für viele verschiedene Strukturelemente findet man in [44].

### 2.3.3 Lösung nichtlinearer Gleichungssysteme

Die numerische Lösung nichtlinearer Problemstellungen wird durch Anwendung iterativer Verfahren bestimmt. Aufgrund seiner quadratischen Konvergenz in der Nähe der Lösung wird häufig das *Newton-Raphson*-Verfahren zur Lösung von nichtlinearen Gleichungen benutzt. Hierbei löst man ausgehend von einem bekannten Deformationszustand (2.51) iterativ, bis ein neuer Gleichgewichtszustand gefunden wurde. Der neue Gleichgewichtspunkt ist erreicht, wenn die Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{f} - \mathbf{k}(\bar{\mathbf{u}})$  minimiert sind.

In der Praxis wird die gesamte Belastung in Lastinkremente zerlegt, so dass das Newton-Raphson-Verfahren für jeden Lastschritt angewendet wird. Als Startwert für das Verfahren kann beispielsweise eine lineare Berechnung mit verminderter Belastung dienen. In Box 2.1 ist in vereinfachter Form der Algorithmus dargestellt. Der gezeigte Algorithmus ist dann in jedem Lastschritt anzuwenden.

Berechne Startwert  $\mathbf{u}_0$ , z.B. durch eine lineare Berechnung oder setze  $\mathbf{u}_0 = 0$ .

**Initialisieren:**  $i = 0$ ,  $\mathbf{u}_\Delta = 0$ ,  $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_0$ ,  $Konvergenz = false$

**do**

1. Berechne  $\mathbf{k}(\mathbf{u}_i)$  und  $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i)$
2. Berechne aktuelles Verschiebungsinkrement  $\mathbf{u}_{\Delta_{i+1}}$  aus

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_i) \mathbf{u}_{\Delta_{i+1}} = \mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u}_i)$$

3. Berechne aktuelle Verschiebung:

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_{\Delta_{i+1}} + \mathbf{u}_i$$

4. Konvergenztest:

$$\|\mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u}_{i+1})\| \begin{cases} > TOL \rightarrow i = i + 1 \\ \leq TOL \rightarrow Konvergenz = true \end{cases}$$

**while**  $Konvergenz = false$

**Box 2.1:** Newton-Raphson-Verfahren

## 2.4 Beispiel Zugstab

Am Beispiel eines nichtlinearen Zugstabs mit großen Verformungen sollen die Variationsformulierung, der Linearisierungsprozess und die numerische Lösung mittels des Newton-Raphson-Verfahrens veranschaulicht werden.

Im eindimensionalen Fall geht der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}(\mathbf{u})$  mit  $\nabla u = u_{1,1} = u'$  über in

$$\varepsilon_x(u) = u' + \frac{1}{2}u'^2. \quad (2.52)$$

Mit  $S = S_x = E \varepsilon_x$  erhält man aus der Gleichgewichtsbedingung (2.23)

$$-\operatorname{div}(S + u'S) = p_x \quad (2.53)$$

bzw.

$$-\operatorname{div} \left[ E \left( u' + \frac{1}{2} u'^2 \right) + u' E \left( u' + \frac{1}{2} u'^2 \right) \right] = p_x. \quad (2.54)$$

Unter Annahme einer konstanten Querschnittsfläche  $A$  folgt mit  $Ap_x = p$  die Verschiebungsdifferentialgleichung für den nichtlinearen Zugstab

$$A(u) := -EA \left[ u' + \frac{1}{2} u'^2 + u' \left( u' + \frac{1}{2} u'^2 \right) \right]' = p. \quad (2.55)$$

Die Schwache Form von (2.55) erhält man durch Multiplikation mit einer Testfunktion  $v \in V := H^1$  und anschließender partieller Integration des linken Terms,

$$\begin{aligned} \int_0^l A(u) \cdot v \, dx &= \int_0^l S \cdot \varepsilon_u(v) A \, dx - [(S + u'S) \cdot v A]_0^l \\ &= \int_0^l p \cdot v \, dx. \end{aligned} \quad (2.56)$$

Mit  $N = A(S + u'S)$  lautet die erste Greensche Identität somit

$$G(u, v) = \int_0^l S \cdot \varepsilon_u(v) A \, dx - \int_0^l p \cdot v \, dx - [N \cdot v]_0^l = 0. \quad (2.57)$$

Der entstehende Ausdruck

$$\varepsilon_u(v) := v' + u'v' \quad (2.58)$$

ist gerade das Gateaux Differential von  $\varepsilon(u)$ :

$$\begin{aligned} \varepsilon_u(v) &= \left[ \frac{d}{d\eta} \varepsilon(u + \eta v) \right]_{\eta=0} \\ &= \left[ \frac{d}{d\eta} \left( (u + \eta v)' + \frac{1}{2} (u + \eta v)'^2 \right) \right]_{\eta=0} = v' + u'v' \end{aligned} \quad (2.59)$$



Dies führt mit

$$a(u; v) := \int_0^l S \cdot \varepsilon_u(v) A dx = \int_0^l E \left( u' + \frac{1}{2} u'^2 \right) (v' + u'v') A dx \quad (2.60)$$

und

$$F(v) := \int_0^l p \cdot v dx + [N \cdot v]_0^l \quad (2.61)$$

auf das folgende stetige Variationsproblem: Finde ein  $u \in V$ , welches die nichtlineare Variationsgleichung

$$a(u; v) = F(v) \quad \forall v \in V \quad (2.62)$$

erfüllt.

Zur numerischen Lösung dieser nichtlinearen Gleichung ist eine Linearisierung an einem bekannten Deformationszustand nötig. Die Linearisierung der virtuellen inneren Arbeit  $a(u, v)$  in Richtung des Verschiebungsincrementes  $u_\Delta$  ist das Gateaux Differential

$$\begin{aligned} a_T(u; u_\Delta, v) &:= \left[ \frac{d}{d\eta} a(u + \eta u_\Delta; v) \right]_{\eta=0} \\ &= \int_0^l [u'_\Delta S(u) v' + \varepsilon_u(v) E \varepsilon_u(u_\Delta)] A dx \end{aligned} \quad (2.63)$$

mit

$$\varepsilon_u(u_\Delta) := u'_\Delta + u' u'_\Delta. \quad (2.64)$$

Vollständig ausgeschrieben und zusammengefasst erhält man

$$a_T(u; u_\Delta, v) = \int_0^l EA \left[ v' \left( 1 + 3u' + \frac{3}{2} u'^2 \right) u'_\Delta \right] dx. \quad (2.65)$$

Die Linearisierung der schwachen Form an der Stelle  $u$  lässt sich wie folgt angeben:

$$a_T(u; u_\Delta, v) = F(v) - a(u; v) \quad (2.66)$$

Die Diskretisierung von (2.66) erhält man in bekannter Weise durch Einführung der FE-Approximation für  $u, v$  und  $u_\Delta$ . Betrachtet wird hierbei der in Abb. 2.1 dargestellte Zugstab.

$$a_T(u_h; u_{\Delta_h}, v_h) = F(v_h) - a(u_h; v_h) \quad (2.67)$$

Mit einer linearen Ansatzfunktion  $\varphi_2 = \frac{x}{l}$  erhält man

$$u_h = u_2 \frac{x}{l} \quad v_h = \varphi_2 = \frac{x}{l} \quad u_{\Delta_h} = u_{\Delta_2} \frac{x}{l}. \quad (2.68)$$

Die Formulierung dieses Ansatzes führt mit  $N(l) = F_2$  auf

$$F(v_h) = \frac{pl}{2} + F_2 =: f_2, \quad (2.69)$$

$$a(u_h; v_h) = \frac{EA}{l} \left[ u_2 + \frac{3}{2l} u_2^2 + \frac{1}{2l^2} u_2^3 \right] =: k(u_2) \quad (2.70)$$

und

$$a_T(u_h; u_{\Delta_h}, v_h) = \frac{EA}{l} \left[ 1 + \frac{3}{l} u_2 + \frac{3}{2l^2} u_2^2 \right] u_{\Delta_2} =: K_T(u_2) u_{\Delta_2}. \quad (2.71)$$

Es folgt schließlich das diskrete lineare Gleichungssystem

$$K_T(u_2) u_{\Delta_2} = f_2 - k(u_2), \quad (2.72)$$

welches beispielsweise mit dem *Newton-Raphson*-Verfahren gelöst werden kann.

Für den Fall  $u_2 = 0$  reduziert sich die tangentielle Steifigkeit  $K_T$  auf die Steifigkeit  $K$  der linearen Theorie. Damit wird  $u_{\Delta_2} = u_2$  und  $k(u_2)$  ergibt sich identisch zu Null. Man erhält die bekannte Gleichung

$$K u_2 = \frac{EA}{l} u_2 = f_2.$$

Zur Veranschaulichung des Newton-Raphson-Verfahrens sind für den in Abb. 2.1 dargestellten Zugstab die Werte der einzelnen Iterationen in Tab. 2.1 aufgeführt. Als Startwert für die Verschiebung dient eine lineare Berechnung mit 5% der Gesamtbelastung.

$$u_{20} = \frac{l}{EA} f_2 \cdot 0.05 = 3.125$$

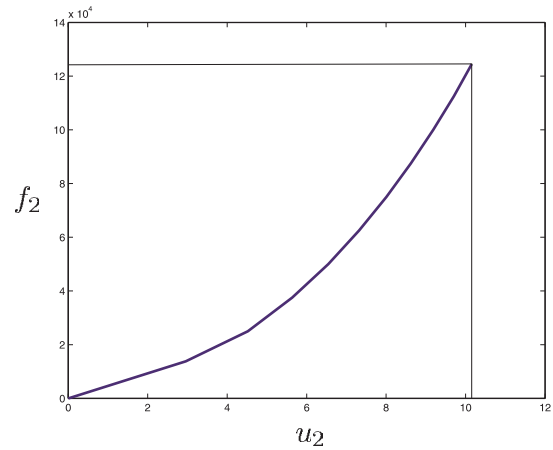
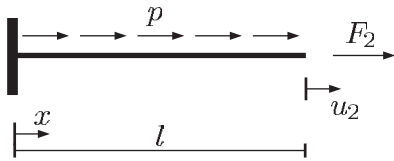
Nach insgesamt 7 Iterationen ist das Verfahren konvergiert, d.h. das Verschiebungsincrement  $u_{\Delta_2}$  ist Null und die Ungleichgewichtskräfte  $f_2 - k(u_2)$  verschwinden.

$$EA = 10000$$

$$l = 5.00$$

$$p = 50000$$

$$F_2 = 0$$



**Abbildung 2.1:** Nichtlinearer Zugstab

**Tabelle 2.1:** Newton-Raphson-Iteration für den nichtlinearen Zugstab

$i$	$u_{2_i} = u_{2_{i-1}} + u_{\Delta_i}$	$u_{\Delta_i}$	$K_T(u_{2_{i-1}})$	$f - k(u_{2_{i-1}})$
0	3.12500	-	-	6250
1	19.25790	16.13290	6921.875	111669.921
2	13.19987	-6.05803	69613.489	-421720.437
3	10.67233	-2.52754	38748.246	-97937.803
4	10.20502	-0.46731	28474.637	-13306.429
5	10.18982	-0.01520	26743.128	-406.615
6	10.18980	-0.00002	26687.672	-0.422
7	10.18980	0	26687.614	0

# 3 Lineare Probleme

Im vorliegenden Kapitel werden zunächst anhand des Randwertproblems der linearen Elastizitätstheorie die bereits schon klassischen globalen Fehlerschätzer vorgestellt. Das Ziel soll sein, einen allgemeinen Überblick über die Thematik zu verschaffen.

Durch Einführung des so genannten dualen Problems, werden die *goal-oriented* oder *zielorientierten* Fehlerschätzer für lineare Probleme behandelt. Zur Motivation werden zuvor einige wichtige Eigenschaften von Einflussfunktionen und finiten Elementen aufgezeigt.

## 3.1 Das lineare Randwertproblem und die FE-Approximation

### 3.1.1 Das Randwertproblem

Der Ausgangspunkt für das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie ist das folgende System von gekoppelten partiellen Differentialgleichungen, bestehend aus den kinematischen Beziehungen (2.11), dem Materialgesetz (2.22) und der lokalen Gleichgewichtsbedingung (2.15):

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T) & \varepsilon_{ij} &= \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{C} \boldsymbol{\varepsilon} & \sigma_{ij} &= C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \\ -\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{p} & -\sigma_{ij,j} &= p_i \end{aligned} \tag{3.1}$$

Hierbei bezeichnet  $\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{ij}]$  den symmetrischen Spannungstensor und  $\boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{ij}]$  den linearen Verzerrungstensor. Im isotropen Fall besitzt der Materialtensor die Gestalt

$$C_{ijkl} = \mu (\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{il}\delta_{jk}) + \lambda \delta_{ij}\delta_{kl} \quad (3.2)$$

und somit ergibt sich der Spannungstensor zu

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij}. \quad (3.3)$$

Durch konsequentes Einsetzen der Spannungen und Verzerrungen in die Gleichgewichtsbedingung (3.1), erhält man die Lamésche Differentialgleichung zweiter Ordnung für die Verschiebungskomponenten  $u_i$ :

$$\begin{aligned} -\sigma_{ij,j} &= -\sigma_{ji,j} \\ &= -2\mu\varepsilon_{ji,j} - \lambda\varepsilon_{kk,i} \\ &= -\mu(u_{j,i} + u_{i,j})_{,j} - \lambda(u_{j,j})_{,i} \\ &= -\mu u_{i,jj} - (\lambda + \mu) u_{j,ji} = p_i \end{aligned} \quad (3.4)$$

Mit dem Differentialoperator  $\mathbf{L}$  angewandt auf die Deformation  $\mathbf{u}$  kann diese Beziehung in kompakter Form dargestellt werden,

$$-\mathbf{L}\mathbf{u} := -[\mu \Delta \mathbf{u} + (\lambda + \mu) \nabla \operatorname{div} \mathbf{u}] = \mathbf{p}. \quad (3.5)$$

Das Randwertproblem der linearen Elastizitätstheorie lässt sich nun folgendermaßen formulieren: Finde ein  $\mathbf{u} \in C^2$ , welches die Gleichung

$$-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \text{in } \Omega \quad (3.6)$$

und die zugehörigen Randbedingungen

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \quad \text{auf } \Gamma_D \quad \text{und} \quad \mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{auf } \Gamma_N$$

erfüllt.

### 3.1.2 Greensche Identitäten

Analog zur Vorgehensweise wie in Kapitel 2.2.2, kann durch Multiplikation von (3.6) mit einer Testfunktion  $\mathbf{v} = (v_i)$  die erste Greensche Identität für die lineare Elastizitätstheorie angegeben werden. Es sei hierbei  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  ein Gebiet mit Lipschitz-stetigen

Rand und  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in C^2 \times C^1$ . Ferner sei  $\mathbf{v} = 0$  auf  $\Gamma_D$ . Die Integration über das gesamte Gebiet ergibt dann

$$-\int_{\Omega} \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega. \quad (3.7)$$

Partielle Integration des linken Terms und Anwendung des Divergenztheorems liefert

$$\begin{aligned} -\int_{\Omega} \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega &= -\int_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Aufgrund der Symmetrie von  $\boldsymbol{\sigma}$  gilt

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \mathbf{v} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{v} + \nabla \mathbf{v}^T) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}). \quad (3.9)$$

Damit lautet die erste Greensche Identität:

$$\begin{aligned} G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= -\int_{\Omega} \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Die erste Greensche Identität ist die mathematische Formulierung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen. Werden  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  vertauscht, dann erhält man unter Voraussetzung von  $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \in C^1 \times C^2$  das Prinzip der virtuellen Kräfte

$$\begin{aligned} G(\mathbf{v}, \mathbf{u}) &:= -\int_{\Omega} \mathbf{L}^* \mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds \\ &\quad - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v}) \cdot \boldsymbol{\varepsilon} \, d\Omega = 0. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{L}^*$  den adjungierten Differentialoperator. Bei der linearen Elastizitätstheorie sind die Differentialoperatoren stets selbstadjungiert, weshalb  $\mathbf{L} = \mathbf{L}^*$  gilt. Der jeweils dritte Term in (3.10) und (3.11) repräsentiert die Wechselwirkungsenergie  $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  bzw.  $E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  der zu den Verschiebungsgrößen  $\mathbf{u}$  bzw.  $\mathbf{v}$  gehörigen Spannungs- und Verzerrungstensoren. In der linearen Statik gilt

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = E(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (3.12)$$

Nach Subtraktion der beiden Identitäten fallen die Terme  $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  heraus und man erhält die zweite Greensche Identität, den Satz von Betti

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &:= G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - G(\mathbf{v}, \mathbf{u}) \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad + \int_{\Omega} \mathbf{L}^*\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds = 0. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Aufgrund der Symmetrie der Wechselwirkungsenergie verbleiben somit nur noch die reziproken äußeren Arbeiten. Wie später noch gezeigt wird, ist der Satz von Betti von fundamentaler Bedeutung in der linearen Statik.

### 3.1.3 Das Variationsproblem

Ausgehend von der ersten Greenschen Identität (3.10), kann das zum Randwertproblem der linearen Elastizität (3.6) gehörige Variationsproblem formuliert werden. Substituiert man das lokale Gleichgewicht  $-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}$  und die Spannungsrandbedingung  $\mathbf{t} = \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}}$  in (3.10) und führt für die innere und äußere Arbeit die Bezeichnungen

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := (\boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (3.14)$$

und

$$F(\mathbf{v}) := (\mathbf{p}, \mathbf{v}) + (\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, ds \quad (3.15)$$

ein, dann lautet das Variationsproblem: Finde ein  $\mathbf{u} \in V$ , welches die Gleichung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.16)$$

erfüllt.

Hierbei ist  $F(\cdot)$  eine Linearform und  $a(\cdot, \cdot)$  eine Bilinearform, d.h. linear in beiden Argumenten und es gilt  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ . Der Lösungs- und Testraum ist der Sobolev-Raum

$$V := \{\mathbf{v} \in H^1(\Omega) : \mathbf{v} = 0 \text{ auf } \Gamma_D\}. \quad (3.17)$$

Die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung dieses Variationsproblems ist durch den Satz von *Lax-Milgram* gegeben.

**Satz von Lax-Milgram:** *Es sei  $a(\cdot, \cdot)$  eine auf  $V$  definierte elliptische Bilinearform und es mögen Konstanten  $\alpha > 0$  und  $M > 0$  existieren mit*

$$|a(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq M \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (3.18)$$

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.19)$$

Dann existiert ein eindeutig bestimmtes  $\mathbf{u} \in V$  mit

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Der Beweis hierfür findet sich beispielsweise in BRAESS [9].

### 3.1.4 FE-Approximation und einige wichtige Eigenschaften

Die FE-Formulierung beruht im Folgenden auf dem *Bubnov-Galerkin*-Verfahren, d.h. für die Ansatz- und Testfunktionen werden dieselben Funktionen aus dem endlichdimensionalen Teilraum  $V_h \subset V$  verwendet. Das zum stetigen Variationsproblem (3.16) gehörige diskrete Variationsproblem lautet dann: Finde ein  $\mathbf{u}_h \in V_h$ , welches die Gleichung

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V \quad (3.20)$$

erfüllt.

Diese Gleichung liefert statt der exakten Lösung  $\mathbf{u} \in V$  der gegebenen Variationsgleichung (3.16) die Lösung  $\mathbf{u}_h \in V_h$  des diskreten Problems. Der Fehler ergibt sich damit aus der Differenz der stetigen Lösung  $\mathbf{u}$  und der diskreten Lösung  $\mathbf{u}_h$  und ist definiert durch

$$\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h. \quad (3.21)$$



Die stetige Lösung  $\mathbf{u}$  genügt der Gleichung (3.16) und gilt wegen  $V_h \subset V$  auch für alle Testfunktionen  $\mathbf{v}_h \in V$ , also gilt

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V. \quad (3.22)$$

Bildet man nun die Differenz von (3.22) und (3.20)

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) - F(\mathbf{v}_h) = 0, \quad (3.23)$$

dann lässt sich die fundamentale *Galerkin-Orthogonalität* angeben, welche für die später folgende Fehlerabschätzung eine wichtige Rolle spielt:

**Galerkin-Orthogonalität:** *Der Fehler in der inneren Energie ist orthogonal zu jedem Element aus  $V_h$ , d.h. es gilt:*

$$a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V. \quad (3.24)$$

Die Galerkin-Orthogonalität besagt also, dass sich die Testfunktionen  $\mathbf{v}_h$  energieorthogonal zu dem Fehler  $\mathbf{e}$  verhalten. Dies bedeutet, dass das Galerkin-Verfahren im Rahmen des gewählten endlichdimensionalen Ansatzraumes  $V_h$  die bestmögliche Lösung liefert. Der Fehler lässt sich demnach auf demselben Netz nicht mehr verbessern, vgl. [18], [27]. Mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität kann die Methode der finiten Elemente als ein *Projektionsverfahren* gedeutet werden, welches die exakte Lösung  $\mathbf{u} \in V$  auf den Ansatzraum  $V_h$  projiziert, d.h.  $\mathbf{u}_h$  ist die Projektion von  $\mathbf{u}$  auf  $V_h$ , vgl. [11].

Wünschenswert wäre nun, bei gegebenen  $V_h$  ein Maß für den Fehler  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  abschätzen zu können. Dies ist gegenwärtig nicht möglich, jedoch kann eine Abschätzung des Verhaltens des Fehlers vorgenommen werden, wenn der maximale Durchmesser  $h$  der verwendeten Elemente gegen Null strebt. Man spricht in diesem Zusammenhang von Konvergenz. Ein gegebenes diskretes Problem konvergiert, wenn gilt

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\| = 0. \quad (3.25)$$

Man ist nun daran interessiert eine hinreichende Bedingung für die Konvergenz angeben zu können. Eine erste Abschätzung liefert das *Céa Lemma*:

**Céa Lemma:** Die Bilinearform  $a(\cdot, \cdot)$  sei elliptisch auf  $V = H^m(\Omega)$ . Ferner sei  $\mathbf{u}$  die Lösung der Variationsaufgabe in  $V$  und  $\mathbf{u}_h$  die Lösung in  $V_h \subset V$ . Dann gilt

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m \leq \frac{M}{\alpha} \inf_{\mathbf{v}_h \in V_h} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_m. \quad (3.26)$$

Die Konstanten  $\alpha$  und  $M$  entsprechen den Konstanten aus den Gln. (3.18) und (3.19). Nach diesem Satz ist der Abstand zwischen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{u}_h$  – bis auf einen konstanten Faktor  $\frac{M}{\alpha}$  – so gut wie der minimale Abstand von  $\mathbf{u}$  zu allen Elementen von  $V_h$ . Damit wurde das obige Konvergenzproblem auf ein Approximationsproblem zurückgeführt, denn die Aufgabe, das Infimum von  $\|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|$  zu ermitteln bzw. abzuschätzen, ist die Approximationsaufgabe,  $\mathbf{u}$  durch Elemente von  $V_h$  möglichst gut zu approximieren, vgl. [21].

Der Ausgangspunkt für den Beweis von (3.26) ist die Galerkin-Orthogonalität  $a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V_h$ . Mit  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h \in V_h$  folgt  $a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) = 0$ . Mit Hilfe von (3.18) und (3.19) gilt

$$\begin{aligned} \alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m^2 &\leq a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h + \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) + a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h - \mathbf{u}_h) \\ &= a(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{u} - \mathbf{v}_h) \\ &\leq M \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_h\|_m. \end{aligned}$$

Die Division durch  $\alpha \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_m$  und die Tatsache, dass die Abschätzung für ein beliebiges  $\mathbf{v}_h \in V_h$  und deswegen auch für das Infimum bei Variation aller  $\mathbf{v}_h \in V_h$  gilt, liefert schließlich die obige Behauptung, vgl. CIARLET, [11].

## 3.2 Globale Fehlerschätzer für lineare Randwertprobleme

Globale Fehlerschätzer wurden bereits seit mehr als zwei Jahrzehnten erfolgreich untersucht. Es wurden effiziente Methoden zur Fehlerschätzung entwickelt und auch in der Praxis eingesetzt. Einen umfassenden Überblick findet man beispielsweise in [12], [38], [42]. Das Ziel aller Fehlerschätzer besteht darin, untere und obere Schranken für den Fehler der FE-Lösung  $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  angeben zu können.

### 3.2.1 Prinzipien der Fehlerschätzung

Bei den bereits schon klassischen globalen Fehlerschätzer unterscheidet man prinzipiell zwei Arten.

**1. A priori Fehlerschätzer:** Das Ziel der klassischen a priori Fehlerschätzer ist es, den Fehler abzuschätzen ohne die Daten der FE-Lösung zu nutzen. Man erhält Informationen über das asymptotische Verhalten der FE-Approximation, d.h. wenn beispielsweise der charakteristische Elementdurchmesser  $h$  gegen Null strebt, siehe *Céa Lemma* Kap. 3.1.4. A priori Fehlerschätzer liefern somit nur Aussagen über das Konvergenzverhalten, jedoch keine quantitativ nutzbaren Fehlergrenzen. Ferner erhält man keine Kriterien für eine lokale Netzadaption.

Wählt man beispielsweise als Fehlermaß  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1}$  und bezeichne  $h$  den maximalen Elementdurchmesser, dann bezeichnet man das Verfahren als *von der Ordnung  $p$  konvergent*, wenn es eine von  $h$  unabhängige Konstante  $c$  gibt mit

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{H^1} \leq c h^p. \quad (3.27)$$

Die Grenze wird somit ausgedrückt durch einen Exponenten von  $h$  und einer Konstanten  $c$ , welche unter anderen von folgenden Faktoren abhängig ist:

- Art der Zerlegung des Gebietes und Wahl der Formfunktionen

- Glätteeigenschaft der (unbekannten) exakten Lösung
- Quadraturformel zur Berechnung der auftretenden Integrale
- Art und Weise der Approximation krummliniger Ränder

Von der Konstante  $c$  weiß man im Allgemeinen nur, dass diese existiert, quantitativ brauchbare Abschätzungen für  $c$  gibt es nur in Spezialfällen, vgl. [21].

**2. A posteriori Fehlerschätzer:** Bei a posteriori Fehlerschätzern werden die aktuellen Daten der FE-Lösung verwendet. Man erhält Fehlergrenzen in Abhängigkeit von lokalen Residuen, welche aus der FE-Approximation berechnet werden, ohne dass Informationen über die exakte Lösung vorhanden sind. A posteriori Fehlerschätzer liefern jedoch a priori keine Aussagen über die Konvergenz für  $h \rightarrow 0$  der aktuellen Diskretisierung. Aufgrund der Berechnung von lokalen Residuen, erhält man Informationen über die Fehler in den einzelnen Elementen und somit Kriterien zur lokalen Netzadaptation.

Um untere und obere Schranken für den Fehler der FE-Lösung  $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  angeben zu können, ermittelt man so genannte globale Fehlerschätzer  $\eta$ , welche zusammen mit (in der Regel) unbestimmten Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  den Fehler begrenzen

$$c_1 \eta \leq \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq c_2 \eta. \quad (3.28)$$

Als Maß für den Fehler wird oft die Energienorm

$$\|\mathbf{e}\|_E := \sqrt{a(\mathbf{e}, \mathbf{e})} \quad (3.29)$$

verwendet, da diese zum einen eine physikalische Bedeutung besitzt und zum anderen äquivalent zu den üblichen Sobolev-Normen ist.

Zur Veranschaulichung der prinzipiellen Vorgehensweise soll ein einfaches Beispiel betrachtet werden: Es bezeichne  $L$  einen linearen Differentialoperator,  $\mathbf{p}$  die Belastung und  $\mathbf{u}$  die exakte Lösung des stetiges Problems

$$L\mathbf{u} = \mathbf{p}.$$

Die zugehörige diskrete Lösung  $\mathbf{u}_h$  angewendet auf den Differentialoperator liefert dann den so genannten *Finite-Element-Lastfall*  $\mathbf{p}_h$ ,

$$\mathbf{L}\mathbf{u}_h = \mathbf{p}_h.$$

Sucht man nun den Fehler  $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ , so muss man ein angemessenes Maß zur Abschätzung dieser Abweichung verwenden, da ja im Allgemeinen die exakte Lösung  $\mathbf{u}$  unbekannt ist. Ein solches Maß ist das Residuum der wahren Belastung  $\mathbf{p}$  und des FE-Lastfalls  $\mathbf{p}_h$ , da dieses berechenbar ist. Das Residuum  $R(\cdot)$  erhält man aus

$$R(\mathbf{u}_h) := \mathbf{L}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{L}\mathbf{u}_h = \mathbf{p} - \mathbf{L}\mathbf{u}_h = \mathbf{p} - \mathbf{p}_h.$$

In der Literatur findet man für das Residuum meist nur die Darstellung  $R(\mathbf{u}_h) = \mathbf{p} - \mathbf{L}\mathbf{u}_h$ . Die Abschätzung des Fehlers erfolgt dann durch Wahl einer geeigneten Norm. Im Rahmen des Galerkin-Verfahrens ist dies häufig die Energienorm  $\|\cdot\|_E$ . Das Resultat ist ein Fehlerschätzer der Form

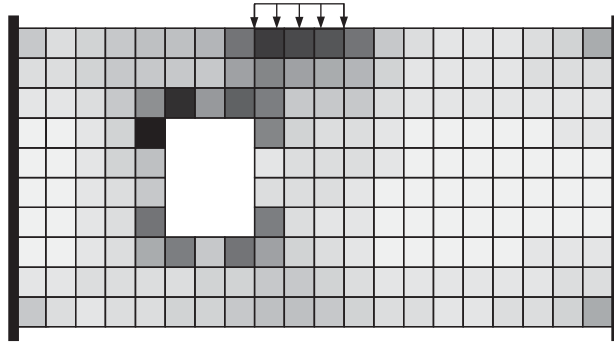
$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E \leq c \|R(\mathbf{u}_h)\|_E^*.$$

Hierbei bezeichnet  $\|\cdot\|_E^*$  eine geeignete duale Norm und  $c$  eine Konstante. Die Energienorm des Fehler wird also nach oben durch eine duale Norm des Residuums begrenzt. Es besteht demnach eine gewisse Äquivalenz zwischen dem Fehler und dem Residuum, vgl. [43].

Bei einem gegebenen Netz mit  $N$  Elementen werden die Residuen dann elementweise berechnet. Für alle Elemente  $\Omega_e$  erhält man so genannte *Fehlerindikatoren*  $\eta_e$ , welche vereinfacht gesagt, den Fehler zwischen dem Originallastfall  $\mathbf{p}$  und dem FE-Lastfall  $\mathbf{p}_h$  repräsentieren. Dort wo die Abweichungen  $\mathbf{p} - \mathbf{p}_h$  am größten sind, wird das Netz verfeinert. Der globale Fehlerschätzer ergibt sich dann aus den Anteilen aller Elemente

$$\eta = \left\{ \sum_{\Omega_e}^N \eta_e^2 \right\}^{1/2}.$$

In Abb. 3.1 ist einmal exemplarisch die Verteilung der Fehlerindikatoren bei einer Wandscheibe dargestellt. Die dunklen Bereiche signalisieren hierbei große Fehler. Besonders im Bereich der Öffnung und der Lasteinleitungsstelle sind die Fehler am größten. An diesen Stellen sollte man das Netz verfeinern.



**Abbildung 3.1:** Fehlerindikatoren bei einer Wandscheibe

Fehlerschätzer, die auf diesem Prinzip beruhen, bezeichnet man als residuenbasierende Fehlerschätzer. Sie gehen auf die Arbeiten von Babuška & Rheinbold [3] zurück. Im Allgemeinen klassifiziert man die residuenbasierenden Fehlerschätzer in so genannte *implizite* und *explizite* Fehlerschätzer. Bei den impliziten Verfahren formuliert man lokale Probleme auf einzelnen Elementen oder Teilgebieten mit einigen wenigen Elementen. Man unterscheidet lokale Neumann-Probleme (belastete Ränder) und lokale Dirichlet-Probleme (eingespannte Ränder). Eine ausführliche Darstellung von impliziten Verfahren findet man z.B. in [12], [38].

Bei den expliziten Verfahren werden keine zusätzlichen Randwertprobleme betrachtet. Man berechnet lokale Residuen und verwendet diese zur Fehlerabschätzung. Im Folgenden wird nun ein solcher expliziter Fehlerschätzer für die Energienorm vorgestellt.

### 3.2.2 Ein expliziter Fehlerschätzer

Ausgangspunkt für diesen Fehlerschätzer ist die Fehlergleichung

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.30)$$

Die rechte Seite dieser Gleichung definiert das Residuum  $R(\mathbf{u}_h, \cdot)$ :

$$\begin{aligned} R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) &:= F(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, ds - \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega \end{aligned} \quad (3.31)$$

Zerlegt man das Gebiet  $\Omega$  in die Beiträge jedes Elementes  $\Omega_e$  und jeder Kante  $\gamma$ , dann lässt sich die Fehlergleichung wie folgt anschreiben

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) &= \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \sum_{\gamma \in \Gamma_{h,N}} \int_{\gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad - \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{u}_h) \cdot \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}) \, d\Omega. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Durch partielle Integration des letzten Terms und Anwendung des Divergenztheorems erhält man

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) &= \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \sum_{\gamma \in \Gamma_{h,N}} \int_{\gamma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad + \sum_{\Omega_e} \left[ \int_{\Omega_e} \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Gamma_e} \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \right] \end{aligned}$$

bzw.

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) &= \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} (\mathbf{p} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \sum_{\gamma \in \Gamma_{h,N}} \int_{\gamma} (\bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n}) \cdot \mathbf{v} \, ds \\ &\quad - \sum_{\gamma \in \Gamma_{h,\Omega}} \int_{\gamma} \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds. \end{aligned} \quad (3.33)$$

In (3.33) bezeichnet  $\mathbf{n}$  den äußeren Normalenvektor,  $\Gamma_{h,N}$  die Kanten auf denen Spannungsrandbedingungen vorgegeben sind und  $\Gamma_{h,\Omega}$  bezeichnet die Kanten die im Inneren des Gebietes  $\Omega$  liegen. Man erkennt, dass elementweise die diskrete FE-Lösung in die starke Form des Gleichgewichts und in die Randbedingungen eingesetzt wird. Die sich ergebenden Residuen werden mit den Testfunktionen  $\mathbf{v}$  getestet. Diese Beziehung kann in kompakter Form dargestellt werden:

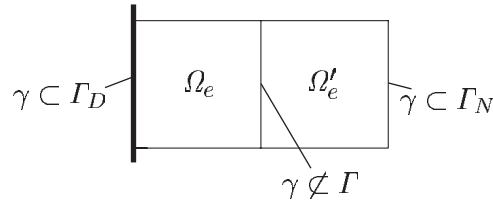
$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \sum_{\gamma} \int_{\gamma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \, ds \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.34)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{r}$  die Elementresiduen und  $\mathbf{j}$  die Sprungresiduen der Spannungen auf den Elementrändern. Diese sind wie folgt definiert:

$$\mathbf{r} := \mathbf{p} + \operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}_h \quad \text{auf } \Omega_e \quad (3.35)$$

$$\mathbf{j} := \begin{cases} \frac{1}{2} (\boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n} + \boldsymbol{\sigma}'_h \mathbf{n}') & \forall \gamma \notin \Gamma \\ \bar{\mathbf{t}} - \boldsymbol{\sigma}_h \mathbf{n} & \forall \gamma \subset \Gamma_N \\ \mathbf{0} & \forall \gamma \subset \Gamma_D \end{cases} \quad (3.36)$$

An jeder gemeinsamen Innenkante  $\gamma$  zweier Elemente  $\Omega_e$  und  $\Omega'_e$  wird das Sprungresiduum  $j$  je zur Hälfte auf beide Elemente verteilt, siehe Abb. 3.2. Daher wurde in (3.36) der Faktor  $\frac{1}{2}$  eingeführt. Es wären jedoch auch andere Verteilungen denkbar, beispielsweise in Abhängigkeit von der Elementgröße.



**Abbildung 3.2:** Kanten beim Scheibenelement

Für Testfunktionen  $\mathbf{v}_h \in V_h$  gilt die Galerkin-Orthogonalität

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.37)$$

Deswegen ändert sich auch nichts an der Fehlergleichung (3.34), wenn man eine Nullergänzung vornimmt,

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v} - \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) - a(\mathbf{e}, \mathbf{v}_h) = a(\mathbf{e}, \mathbf{v}). \quad (3.38)$$

Für  $\mathbf{v}_h$  wird die Interpolierende  $\mathbf{I}_h \mathbf{v} \in V_h$  eingeführt, welche  $\mathbf{v} \in V$  in den Knoten interpoliert. An jedem Knotenpunkt  $\mathbf{P}$  ist also  $\mathbf{I}_h \mathbf{v}(\mathbf{P}) = \mathbf{v}(\mathbf{P})$  erfüllt, vgl. [6]. Die Fehlergleichung erhält dann die Form

$$a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) \, d\Omega + \sum_{\gamma} \int_{\gamma} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}) \, ds. \quad (3.39)$$

Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung

$$|(\mathbf{u}, \mathbf{v})| \leq \|\mathbf{u}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in V \quad (3.40)$$

folgt

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) &\leq \sum_{\Omega_e} \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_{L_2(\Omega_e)} \\ &\quad + \sum_{\gamma} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_{L_2(\gamma)}. \end{aligned} \quad (3.41)$$



Man verwendet nun eine Abschätzung der Interpolationsfehler, bei der sich die  $L_2$ -Norm des Fehlers von  $v$  und der Interpolierenden  $\mathbf{I}_h v$  in der  $H^1$ -Norm abschätzen lässt, vgl. z.B. CIARLET in [11]:

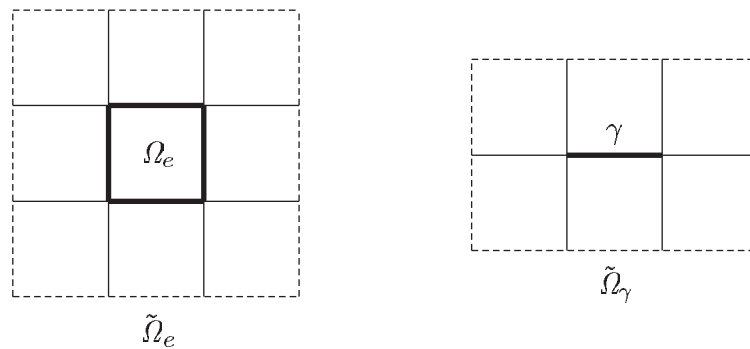
$$\|v - \mathbf{I}_h v\|_{L_2(\Omega_e)} \leq c_1 h_e \|v\|_{H^1(\tilde{\Omega}_e)} \quad (3.42)$$

$$\|v - \mathbf{I}_h v\|_{L_2(\gamma)} \leq c_2 \sqrt{h_\gamma} \|v\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\gamma)} \quad (3.43)$$

Hierbei bezeichnet  $h_e$  den Durchmesser des Elementes  $\Omega_e$ , welcher aus einem flächengleichen Kreis mit Hilfe des Flächeninhaltes  $A_e$  des betrachteten Elementes bestimmt wird

$$h_e := 2\sqrt{\frac{A_e}{\pi}}. \quad (3.44)$$

Die Größe  $h_\gamma$  ist identisch mit der Länge der Kante  $\gamma$ . Ferner bezeichnet  $\tilde{\Omega}_e$  ein Teilgebiet aller Elemente, die mindestens einen Punkt mit dem betrachteten Element  $\Omega_e$  teilen. Entsprechend bezeichnet  $\tilde{\Omega}_\gamma$  ein Teilgebiet der Elemente, welche mindestens einen Punkt mit der Kante  $\gamma$  teilen, siehe Abb. 3.3. Die Interpolationsabschätzung erfolgt also lokal in einem kleinen Gebiet um  $\Omega_e$  bzw.  $\gamma$ , siehe VERFÜRTH in [43].



**Abbildung 3.3:** Definition der Gebiete  $\tilde{\Omega}_e$  und  $\tilde{\Omega}_\gamma$

Die Konstanten  $c_1$  und  $c_2$  bezeichnen Interpolationskonstanten, welche im Allgemeinen unbekannt sind. Es besteht jedoch die Möglichkeit diese quantitativ zu bestimmen, wenn eine analytische Lösung eines Randwertproblems bekannt ist. Nach [38] können die Interpolationskonstanten beispielsweise folgendermaßen bestimmt werden:

$$c_1 = \sup_{\Omega_e \in \Omega_h} \sup_{v \in V} \frac{h_e^{-1} \|v - \mathbf{I}_h v\|_{\Omega_e}}{\|\nabla v\|_{\tilde{\Omega}_e}} \quad (3.45)$$

$$c_2 = \sup_{\gamma \in \Gamma_h} \sup_{\mathbf{v} \in V} \frac{h_\gamma^{-\frac{1}{2}} \|\mathbf{v} - \mathbf{I}_h \mathbf{v}\|_\gamma}{\|\nabla \mathbf{v}\|_{\tilde{\Omega}_\gamma}} \quad (3.46)$$

Die Interpolationskonstanten sind demnach von lokalen Parametern abhängig und deshalb bei vorhandener analytischer Lösung berechenbar. Ferner sind die Interpolationskonstanten noch vom Aspektverhältnis  $h_e/\rho_e$  anhängig, wobei  $\rho_e$  der minimale Innenwinkel eines Elementes ist. In (3.45) und (3.46) spiegelt sich das Aspektverhältnis in der Größe der Gebiete  $\tilde{\Omega}_e$  und  $\tilde{\Omega}_\gamma$  wieder. Des Weiteren sind die Interpolationskonstanten noch vom Polynomgrad  $p$  der verwendeten Interpolationsfunktion abhängig. Damit lässt sich die lokale Interpolationskonstante als Funktion angeben,

$$c_i = f(h_{e,\gamma}, p, \rho_e). \quad (3.47)$$

Es existieren auch andere Methoden, welche auf der Lösung eines endlich dimensionalen Eigenwertproblems beruhen. Auf diese soll jedoch an dieser Stelle nicht weiter eingegangen werden, siehe hierzu KELLY et al. in [28].

Setzt man nun die Interpolationsabschätzungen (3.42) und (3.43) in (3.41) ein, dann erhält man

$$\begin{aligned} a(\mathbf{e}, \mathbf{v}) &\leq \sum_{\Omega_e} c_1 h_e \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_e)} + \sum_{\gamma} c_2 h_\gamma^{1/2} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\gamma)} \\ &\leq c_I \left\{ \sum_{\Omega_e} h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + \sum_{\gamma} h_\gamma \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)}^2 \right\}^{1/2} \\ &\quad \cdot \underbrace{\left\{ \sum_{\Omega_e} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_e)}^2 + \sum_{\gamma} \|\mathbf{v}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_\gamma)}^2 \right\}^{1/2}}_{\leq c_r \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)}} \\ &\leq c_I c_r \|\mathbf{v}\|_{H^1(\Omega)} \left\{ \sum_{\Omega_e} h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + \sum_{\gamma} h_\gamma \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.48) \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet  $c_I = \max\{c_1, c_2\}$  den maximalen Wert der Interpolationskonstanten. Die Konstante  $c_r$  hängt von der maximalen Anzahl der Elemente in den Gebieten  $\tilde{\Omega}_e$  bzw.  $\tilde{\Omega}_\gamma$  ab. Durch Ausnutzung der V-Elliptizität kann eine Abschätzung der  $H^1$ -Norm gegen die Energienorm vorgenommen werden

$$\|\mathbf{v}\|_{H^1}^2 \leq c_s \|\mathbf{v}\|_E^2, \quad (3.49)$$

wobei  $c_s$  die globale Stabilitätskonstante bezeichnet. Diese spiegelt die Sensitivität der Differentialgleichung bezüglich aufgebrauchter Störungen der betrachteten Randwertprobleme wieder. Eine Störung ist beispielsweise eine Singularität, ein Randschichteffekt oder eine Schockwelle. Die Stabilitätskonstante hängt ferner vom Typ der Differentialgleichung ab. Bei elliptischen Differentialgleichungen – wie beispielsweise die in diesem Kapitel betrachtete Lamésche Differentialgleichung (3.5) – kann die Stabilitätskonstante zu  $c_s = 1$  gesetzt werden [38].

Setzt man die Abschätzung (3.49) in die Ungleichung (3.48) ein und wählt als Testfunktion den Fehler  $\mathbf{e}$ , so folgt

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq c_I c_r c_s \left\{ \sum_{\Omega_e} h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + \sum_{\gamma} h_{\gamma} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)}^2 \right\} \quad (3.50)$$

bzw.

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq c \sum_{\Omega_e} \left\{ h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + \sum_{\gamma \subset \Gamma_e} h_{\gamma} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)}^2 \right\}. \quad (3.51)$$

Hierbei wurden zur Vereinfachung die Konstanten  $c_I, c_r, c_s$  zur Konstante  $c$  zusammengefasst. Damit lässt sich elementweise der so genannte lokale Fehlerindikator  $\eta_e$  berechnen, welcher definiert ist durch

$$\eta_e^2 := h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + \sum_{\gamma \subset \Gamma_e} h_{\gamma} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\gamma)}^2. \quad (3.52)$$

Der lokale Fehlerindikator  $\eta_e$  ist ein Maß dafür, um wie viel die Verzerrungsenergie der FE-Lösung im Element von der exakten Energie abweicht und stellt somit eine obere Grenze für den Fehler im Element  $\Omega_e$  dar,

$$\|\mathbf{e}_e\|_E^2 = a(\mathbf{e}, \mathbf{e})_{\Omega_e} \leq c \eta_e^2. \quad (3.53)$$

Durch Summation über alle Elemente folgt der globale Fehlerschätzer  $\eta$  für den Fehler in der Energienorm

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \leq c \eta^2 = c \sum_e \eta_e^2. \quad (3.54)$$

Dieser stellt eine obere Schranke für den globalen Fehler in der Energienorm dar. Er sagt jedoch nichts über die Güte einzelner lokaler Größen aus. Der Fehlerschätzer wird als globaler, residuenbasierender Fehlerschätzer bezeichnet.

**Bemerkung 3.1** In der Literatur findet man auch häufig eine etwas kompaktere Darstellung für den Energienormfehler, welche auch auf Interpolationsabschätzungen beruht, vgl. [4], [12], [24],

$$\|e\|_E^2 \leq c \sum_e \eta_e^2 = c \sum_e \left\{ h_e^2 \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + h_e \|\mathbf{j}\|_{L_2(\Gamma_e)}^2 \right\}. \quad (3.55)$$

Hierbei wird nicht mehr auf jede einzelne Kante  $\gamma$ , sondern nur noch auf den gesamten Rand  $\Gamma_e = \partial\Omega_e = \sum_i \gamma_i$  des Elementes  $\Omega_e$  Bezug genommen. Auf diese Darstellung wird im Folgenden zurückgegriffen.

### 3.2.3 $Z^2$ -Fehlerschätzer

Eine andere Möglichkeit den Fehler in der Energienorm abzuschätzen wurde von ZIENKIEWICZ & ZHU [45] vorgeschlagen. Hierbei wird ein Fehlerschätzer konstruiert, indem man die vom FE-Programm berechneten Spannungen  $\sigma_h$  mit geglätteten Spannungen  $\sigma_h^*$  vergleicht. Es wird unterstellt, dass die in einer Nachlaufrechnung gewonnenen Spannungen  $\sigma_h^*$  eine bessere Approximation für ihren tatsächlichen Verlauf darstellen.

$$\mathbf{e} \approx \mathbf{e}^* = \sigma_h^* - \sigma_h \quad (3.56)$$

Man gewinnt die geglätteten Spannungen aus den Knotenwerten  $\sigma_{h_i}^*$  und den Ansatzfunktionen  $\phi_i$

$$\sigma_h^* = \sum \sigma_{h_i}^* \phi_i(\mathbf{x}). \quad (3.57)$$

Zur Bestimmung der Knotenwerte  $\sigma_{h_i}^*$  wird die  $L_2$ -Projektion

$$\int_{\Omega} \phi_j(\mathbf{x})(\sigma_h^* - \sigma_h) d\Omega = 0 \quad (3.58)$$

formuliert, was auf das Gleichungssystem

$$\int_{\Omega} \phi_j \phi_i d\Omega \sigma_{h_i}^* = \int_{\Omega} \phi_j \sigma_h d\Omega \quad (3.59)$$

zur Berechnung von  $\sigma_{h_i}^*$  führt. Für die Fehlerschätzung wird nun anstatt der unbekannt wahren Lösung  $\sigma$  die geglättete Spannung  $\sigma_h^*$  verwendet. Der Fehlerschätzer erhält dann die Form

$$\|e\|_E^2 \approx a(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}^*) = \int_{\Omega} (\sigma_h^* - \sigma_h) \cdot (\varepsilon_h^* - \varepsilon_h) d\Omega. \quad (3.60)$$

Zur praktischen Berechnung des Fehlerschätzers wird dieser elementweise ausgewertet:

$$\|e\|_E^2 \approx \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e^2 \quad \text{mit} \quad \eta_e^2 = \int_{\Omega_e} (\boldsymbol{\sigma}_{h_e}^* - \boldsymbol{\sigma}_{h_e}) \cdot (\boldsymbol{\varepsilon}_{h_e}^* - \boldsymbol{\varepsilon}_{h_e}) d\Omega. \quad (3.61)$$

Nach ZIENKIEWICZ & ZHU lässt sich das vorgenannte Verfahren noch verbessern, wenn man die Glättung der Spannungen nicht an den Knotenpunkten, sondern an so genannten *superkonvergenten* Punkten vornimmt.

Die in den letzten Abschnitten vorgestellten Fehlerschätzer  $\eta$  liefern Aussagen über den globalen Fehler im betrachteten Gebiet. Ferner erhält man mit Hilfe der Fehlerindikatoren  $\eta_e$  Kriterien zu Netzadaption, jedoch repräsentieren diese nicht den lokalen Fehler im Element. Sie geben lediglich den Beitrag des Elementes  $\Omega_e$  zum globalen Fehlerschätzer  $\eta$  wieder. Man erhält keine Aussagen über die Güte einzelner lokaler Werte.

Das folgende Kapitel soll nun dazu dienen, die so genannten lokalen oder zielorientierten Fehlerschätzer zu motivieren, welche es ermöglichen, Aussagen über den Fehler einer beliebigen lokalen Größe zu machen.

### 3.3 Einflussfunktionen und finite Elemente

Die Greenschen Funktionen (Einflussfunktionen) sind in der klassischen Statik von großer Bedeutung, da sich mit ihrer Hilfe jede lokale und globale Weg- oder Kraftgröße berechnen lässt. Betrachten wir ein Beispiel aus der Balkenstatik: Gesucht sei beispielsweise die Durchbiegung  $w$  im Punkt  $x$  eines Kragträgers unter einer Linienlast  $p(y)$ . Diese lässt sich nun berechnen, indem man die zugehörige Greensche Funktion  $G_0(y, x)$  mit der gegebenen Belastung  $p$  überlagert,

$$w(x) = \int_0^l G_0(y, x) p(y) dy.$$

Eine Greensche Funktion  $G_i(y, x)$  ist gerade die Verformungsfigur, die entsteht, wenn man die zur gesuchten Größe duale Belastung aufbringt. Im Fall der gesuchten Durchbiegung  $w(x)$  ist diese duale Belastung eine Einzellast  $P = 1$  im Punkt  $x$ . Die entstehende Verformungsfigur ist gerade die Greensche Funktion für die Durchbiegung.

Diese Technik lässt sich auch erfolgreich auf die finiten Elemente anwenden, vgl. [18], [24]. Hierbei wird jedoch nicht mehr die exakte Greensche Funktion  $G_0(y, x)$ , sondern eine auf den aktuellen Ansatzraum projizierte Greensche Funktion  $G_0^h(y, x)$  verwendet, welche in der Regel nur eine Näherung darstellt. Die resultierende Durchbiegung

$$w_h(x) = \int_0^l G_0^h(y, x) p(y) dy$$

stellt demnach auch nur eine Näherung dar. Für den Fehler  $e := w - w_h$  folgt somit

$$e = w - w_h = \int_0^l (G_0(y, x) - G_0^h(y, x)) p(y) dy.$$

Die Tatsache, dass der Fehler der Lösung  $w - w_h$  abhängig ist vom Fehler in der Greenschen Funktion  $G_0 - G_0^h$ , wird ausgenutzt, um die zielorientierten Fehlerschätzer oder *Dualitätstechniken* zu motivieren. Zunächst soll jedoch die vorgestellte Technik weiter spezifiziert werden.

### 3.3.1 Greensche Funktionen

Verallgemeinert auf die lineare Elastizitätstheorie, bezeichnet die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  die Lösung des so genannten dualen Problems

$$-\mathbf{L}^* \mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) = \boldsymbol{\delta}_i^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \quad \text{in } \Omega, \quad (3.62)$$

welche die aktuellen Randbedingungen auf  $\Gamma_D$  und  $\Gamma_N$  erfüllt<sup>1</sup>. Die Darstellung der Belastung erfolgt mit Hilfe der Diracschen-  $\delta$ -Funktion. Es bezeichne

$\boldsymbol{\delta}_0^j(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  eine Einzellast  $P = 1$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung von  $j$  und

$\boldsymbol{\delta}_1^j(\mathbf{y} - \mathbf{x})$  eine Versetzung um Eins an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung von  $j$ .

Die Dirac-Deltas  $\boldsymbol{\delta}_i$  sollen hierbei die Eigenschaft

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_i^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{u}(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{u}) = \partial^i u_j(\mathbf{x}) \quad (3.63)$$

<sup>1</sup>Erfüllt eine Funktion  $\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  nicht die aktuellen Randbedingungen, dann nennt man diese eine *Grundlösung* oder *Fundamentallösung*. Im Gegensatz zu Greenschen Funktionen sind die Grundlösungen für Scheiben, Platten und Kontinua bekannt. Diese bilden u.a. die Grundlage für die Methode der Randelemente, siehe hierzu z.B. [23].

besitzen, vgl. [23]. Mit dieser Notation ist die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_0(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  das Verschiebungsfeld im Punkt  $\mathbf{y}$  infolge  $\delta_0^j$  im Quellpunkt  $\mathbf{x}$  und  $\mathbf{G}_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  das Verschiebungsfeld im Punkt  $\mathbf{y}$  infolge  $\delta_1^j$ .

Ausgangspunkt für eine Integraldarstellung für Verschiebungen oder Spannungen ist die zweite Greensche Identität, der Satz von Betti, siehe Gl. (3.13),

$$\begin{aligned} B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := & - \int_{\Omega} \mathbf{L}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, ds \\ & + \int_{\Omega} \mathbf{L}^*\mathbf{v} \cdot \mathbf{u} \, d\Omega - \int_{\Gamma_N} \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{v})\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} \, ds = 0. \end{aligned} \quad (3.64)$$

Als Testfunktion wird für  $\mathbf{v}$  die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_i(\mathbf{y}, \mathbf{x})$  eingesetzt. Unter Beachtung von  $\mathbf{u} = 0$  auf  $\Gamma_D$  erhält der Satz von Betti die Darstellung

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{G}_i) = (-\mathbf{L}\mathbf{u}, \mathbf{G}_i) + (\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n}, \mathbf{G}_i) - (-\mathbf{L}^*\mathbf{G}_i, \mathbf{u}) = 0. \quad (3.65)$$

Substituiert man nun noch  $-\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{p}$ ,  $\boldsymbol{\sigma}\mathbf{n} = \mathbf{t}$  und  $-\mathbf{L}^*\mathbf{G}_i = \delta_i^j$ , dann erhält man mit Hilfe von (3.63) die Beziehung

$$\partial^i u_j(\mathbf{x}) = (\delta_i^j, \mathbf{u}) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_i) + (\mathbf{t}, \mathbf{G}_i). \quad (3.66)$$

Hiernach kann jede lokale Verschiebungsgröße  $\partial^0 u_j(\mathbf{x}) = u_j(\mathbf{x})$  oder jede lokale Spannungsgröße  $\partial^1 u_j(\mathbf{x}) = t_j(\mathbf{x})$  aus dem Skalarprodukt der zugehörigen Greenschen Funktion und der Belastung berechnet werden.

Gesucht sei nun die Verschiebung  $u_i$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die zu der Verschiebung  $u_i(\mathbf{x})$  gehörige duale Belastung ist  $\delta_0^i$ , d.h. eine Einzellast  $P = 1$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Aus (3.66) folgt unmittelbar

$$u_i(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_0^i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{G}_0^i(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}}. \quad (3.67)$$

Analog hierzu erhält man eine gesuchte Spannung  $\sigma_{ij}(\mathbf{x})$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die zu einer Spannungsgröße duale Belastung ist ein Versatz von Eins im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die infolge dieser Belastung entstehende Verformungsfigur ist gerade die Greensche Funktion  $\mathbf{G}_1(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ . Damit folgt die Integraldarstellung zur Berechnung der Spannungen

$$\sigma_{ij}(\mathbf{x}) = \int_{\Omega} \mathbf{G}_1^{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{p}(\mathbf{y}) \, d\Omega_{\mathbf{y}} + \int_{\Gamma_N} \mathbf{G}_1^{ij}(\mathbf{y}, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{t}(\mathbf{y}) \, ds_{\mathbf{y}}. \quad (3.68)$$

Für integrale Größen, wie z.B. Lagerkräfte oder Schnittkräfte, lassen sich die getroffenen Aussagen entsprechend formulieren. Eine Ausführliche Darstellung der vorgeannten Beziehungen mit weiterführenden mathematischen Details findet man beispielsweise in [18], [22], [24], [25].

### 3.3.2 Der Projektionssatz

Will man nun die obige Technik auf die finiten Elemente übertragen, dann stößt man auf das Problem, dass in der Regel die exakten Greenschen Funktionen nicht im aktuellen Ansatzraum  $V_h$  enthalten sind. Betrachtet man beispielsweise die Greensche Funktion für die Spannung einer Scheibe im Punkt  $\boldsymbol{x}$ , dann erhält man diese, indem man an der Stelle  $\boldsymbol{x}$  einen Versatz von Eins aufbringt. Dieser Versatz ist jedoch eine Unstetigkeit, welche das FE-Netz nicht exakt darstellen kann.

Berechnet man die Greensche Funktion mit finiten Elementen, dann erhält also nur eine Näherung  $\mathbf{G}_i^h$ , d.h. man löst das diskrete Variationsproblem: Finde ein  $\mathbf{G}_i^h \in V_h$ , welches die Gleichung

$$a(\mathbf{G}_i^h, \mathbf{v}_h) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V \quad (3.69)$$

erfüllt.

Man bezeichnet die genäherte Greensche Funktion  $\mathbf{G}_i^h$  als Projektion der echten Greenschen Funktion auf den aktuellen Ansatzraum.

Um nun das Konzept der Einflussfunktionen auf die finiten Elemente zu übertragen, betrachten wir das diskrete Variationsproblem (3.20),

$$a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V. \quad (3.70)$$

Diese Gleichung gilt für alle Testfunktionen  $\mathbf{v}_h \in V_h$  und daher auch für  $\mathbf{G}_i^h \in V_h$ :

$$F(\mathbf{G}_i^h) = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{G}_i^h) = a(\mathbf{G}_i^h, \mathbf{u}_h) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{u}_h) \quad (3.71)$$



Der wichtigste Punkt für diese Darstellung ist die Symmetrie der Bilinearform. Aufgrund dieser Symmetrie verbleiben nur die äußeren reziproken Arbeiten. Der entstehende Ausdruck ist gerade der Satz von Betti

$$(\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{u}_h) = F(\mathbf{G}_i^h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_i^h) + (\mathbf{t}, \mathbf{G}_i^h). \quad (3.72)$$

Man erhält somit die diskrete Form von (3.66)

$$\partial^i u_j^h(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{u}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_i^h) + (\mathbf{t}, \mathbf{G}_i^h). \quad (3.73)$$

Diese Formulierung ist identisch mit  $B(\mathbf{u}_h, \mathbf{G}_i^h) = 0$ . Es kann daher der folgende Satz angegeben werden:

**Projektionssatz:** Die FE-Lösung  $\mathbf{u}_h$  erfüllt alle Identitäten hinsichtlich der projizierten Greenschen Funktionen  $\mathbf{G}_i^h \in V_h$ , d.h. es gilt

$$G(\mathbf{u}_h, \mathbf{G}_i^h) = 0 \quad \text{und} \quad B(\mathbf{u}_h, \mathbf{G}_i^h) = 0 \quad \forall \mathbf{G}_i^h \in V_h \subset V. \quad (3.74)$$

Die wichtigste Aussage dieses Satzes und von (3.73) ist, dass die finiten Elemente zur Berechnung beliebiger Größen anstatt der echten Greenschen Funktion eine auf den aktuellen Ansatzraum projizierte Greensche Funktion verwenden. Die projizierte Greensche Funktion ist hierbei in der Regel eine Näherung. Der Fehler in der FE-Lösung einer lokalen Größe  $\partial^i u_j(\mathbf{x})$  ist damit direkt abhängig vom Fehler in der Greenschen Funktion,

$$e = \partial^i u_j(\mathbf{x}) - \partial^i u_j^h(\mathbf{x}) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_i^h) + (\mathbf{t}, \mathbf{G}_i - \mathbf{G}_i^h). \quad (3.75)$$

### 3.3.3 Verallgemeinerte Greensche Funktionen

Die im vorherigen Abschnitt gezeigten Beziehungen sollen im Folgenden verallgemeinert werden. Es wird hierfür eine in der Literatur oft verwendete etwas abstraktere Notation eingeführt, vgl. [4], [25], [33].

In einem abstrakten Sinn ist die rechte Seite der Variationsformulierung

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.76)$$

ein Funktional auf  $V$ . Dieses Funktional repräsentiert die Belastung  $\mathbf{p}$  des betrachteten Randwertproblems. Für jedes Funktional  $F(\mathbf{v})$  existiert eine schwache Lösung  $\mathbf{u}$ . Betrachtet man nun ein Funktional  $J(\mathbf{v})$ , welches nicht zwingend mit einer Belastung  $\mathbf{p}$  assoziiert werden muss, dann soll eine schwache Lösung  $\mathbf{z}$  derart existieren, so dass

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.77)$$

Die Funktion  $\mathbf{z}$  bezeichnet man als die duale Lösung und kann als verallgemeinerte Greensche Funktion interpretiert werden. Formuliert man die erste Greensche Identität für  $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\} \in V \times V$ ,

$$G(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{z}) - a(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = 0, \quad (3.78)$$

dann erhält man mit  $a(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{u})$ ,

$$F(\mathbf{z}) = a(\mathbf{u}, \mathbf{z}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{u}) = J(\mathbf{u}). \quad (3.79)$$

Der entstehende Ausdruck ist abermals der Satz von Betti. Der Dreh- und Angelpunkt ist wieder die fundamentale Symmetriebedingung des Mittelterms  $a(\cdot, \cdot)$ .

Etwas pragmatischer könnte man sagen,  $\mathbf{z}$  ist die Lösung eines Lastfalls  $\mathbf{j}$ . Wählt man als Lastfall beispielsweise  $\delta_0^j$ , dann ist  $J(\mathbf{u}) = (\delta_0^j, \mathbf{u})$  und es folgt die Beziehung

$$J(\mathbf{u}) = (\delta_0^j, \mathbf{u}) = u_j(\mathbf{x}) = F(\mathbf{z}) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) + (\mathbf{t}, \mathbf{z}). \quad (3.80)$$

Das ist gerade Gl. (3.66) zur Berechnung einer lokalen Verschiebung  $u_j(\mathbf{x})$ , mit dem Unterschied, dass  $\mathbf{G}_0$  durch  $\mathbf{z}$  ersetzt wurde.

Der Vorteil dieses Ansatzes besteht nun darin, dass man nicht mehr nur Dirac-Deltas oder Einheitslasten betrachtet, sondern mit irgendeinem Funktional

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \mathbf{u} d\Omega \quad J(\mathbf{u}) = \int_{\Omega} \delta_i^j \mathbf{u} d\Omega \quad J(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} ds \quad (3.81)$$

eine Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  assoziieren kann, so dass

$$J(\mathbf{u}) = F(\mathbf{z}). \quad (3.82)$$

Verallgemeinert könnte man sagen: lokale Größen, wie Verschiebungen oder Spannungen sowie integrale Größen, wie Schnittkräfte oder Lagerkräfte, können ermittelt

werden, indem man ein Funktional  $J(\mathbf{u})$  auf die Lösung  $\mathbf{u}$  anwendet. Dies impliziert, dass eine verallgemeinerte Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  derart existiert, dass  $J(\mathbf{u}) = F(\mathbf{z})$ .

Ein etwas ingenieurmäßigerer Zugang folgt der Vorgehensweise in Kap. 3.3.1. Es sei  $L$  ein linearer Differentialoperator. Der Einfachheit halber seien homogene Randbedingungen  $\mathbf{u} = 0$  auf  $\Gamma$  vorgegeben. Zusätzlich zum ursprünglichen Problem und der zugehörigen schwachen Formulierung

$$-L\mathbf{u} = \mathbf{p} \quad \text{in } \Omega \quad \rightarrow \quad a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{p}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.83)$$

wird ein duales Problem mit dem adjungierten Differentialoperator  $L^*$  eingeführt, welcher auf die Primärvariable  $\mathbf{z}$  des dualen Problems angewendet wird und die aktuellen Randbedingungen erfüllt:

$$-L^*\mathbf{z} = \mathbf{j} \quad \text{in } \Omega \quad \rightarrow \quad a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = (\mathbf{j}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.84)$$

Formuliert man die zweite Greensche Identität für  $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\} \in V \times V$ , dann folgt

$$J(\mathbf{u}) = (\mathbf{u}, \mathbf{j}) = (\mathbf{u}, -L^*\mathbf{z}) = (-L\mathbf{u}, \mathbf{z}) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) = F(\mathbf{z}). \quad (3.85)$$

Gesucht sei beispielsweise die Verschiebung  $u(\mathbf{x})$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$ . Die zugehörige duale Belastung ist  $\mathbf{j} = \delta_0$  und die zugehörige Greensche Funktion ist  $\mathbf{z} = \mathbf{G}_0$ , so dass

$$J(\mathbf{u}) = u(\mathbf{x}) = (\mathbf{u}, \delta_0) = (\mathbf{u}, -L^*\mathbf{G}_0) = (-L\mathbf{u}, \mathbf{G}_0) = (\mathbf{p}, \mathbf{G}_0). \quad (3.86)$$

Diese Gleichung entspricht formal (3.66).

Im obigen Kontext soll im Folgenden ganz allgemein mit  $J(\cdot)$  die gesuchte Zielgröße bezeichnet werden, d.h. irgendeine gesuchte lokale oder integrale Größe, die man aus dem Skalarprodukt der verallgemeinerten Greenschen Funktion und der Belastung des ursprünglichen Problems berechnen kann:

$$J(\mathbf{u}) = F(\mathbf{z}) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}) + (\mathbf{t}, \mathbf{z}). \quad (3.87)$$

Nach dem Projektionssatz (3.73) verwendet man bei der Berechnung mit finiten Elementen anstatt der echten Greenschen Funktion  $\mathbf{z}$  die auf den aktuellen Ansatzraum

projizierte Greensche Funktion  $z_h$  und erhält somit die FE-Approximation der Zielgröße  $J(\mathbf{u})$ ,

$$J(\mathbf{u}_h) = F(\mathbf{z}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z}_h) + (\mathbf{t}, \mathbf{z}_h). \quad (3.88)$$

Der Fehler in der Zielgröße ergibt sich somit aus

$$J(\mathbf{e}) := J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = F(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = (\mathbf{p}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + (\mathbf{t}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \quad (3.89)$$

### 3.3.4 Berechnung von Greenschen Funktionen

Es wurde in den vorherigen Abschnitten gezeigt, dass die Güte lokaler Werte einer FE-Berechnung abhängig ist von der Güte der projizierten Greenschen Funktion. Im Rahmen der Fehlerabschätzung, aber auch bei anderen Aufgabenstellungen des Ingenieurbaus, wie beispielsweise im Brückenbau, ist man an der Berechnung von Greenschen Funktionen interessiert. Eine zentrale Frage ist daher, wie man diese numerisch mit finiten Elementen ermitteln kann.

Bei einer FE-Berechnung wird die äußere Belastung in so genannte äquivalente Knotenkräfte umgerechnet. Die äußere Belastung und die äquivalenten Knotenkräfte sind dabei arbeitsäquivalent bezüglich der Knoteneinheitsverformungen  $\phi_k$ . Man erhält die äquivalenten Knotenkräfte  $f_k$  aus der rechten Seite der diskreten Variationsgleichung

$$a(\mathbf{u}_h, \phi_k) = F(\phi_k) \quad \forall \phi_k \in V_h, \quad (3.90)$$

wenn man die Belastung gegen die Einheitsverformungen arbeiten lässt:

$$f_k = F(\phi_k) = (\mathbf{p}, \phi_k) + (\bar{\mathbf{t}}, \phi_k) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \phi_k \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \phi_k \, ds. \quad (3.91)$$

Überträgt man diese Vorgehensweise auf die Berechnung des diskreten dualen Problems

$$a(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h) = J(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h, \quad (3.92)$$

dann erhält man die äquivalenten Knotenkräfte aus der rechten Seite der diskreten Variationsgleichung

$$a(\mathbf{z}_h, \phi_k) = J(\phi_k) \quad \forall \phi_k \in V_h. \quad (3.93)$$

Die äquivalenten Knotenkräfte sind somit abhängig von der Gestalt des Funktionals  $J(\cdot)$ . Für  $J(\mathbf{v}_h) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{v}_h)$  erhält man mit  $\mathbf{v}_h = \boldsymbol{\phi}_k$

$$f_k = J(\boldsymbol{\phi}_k) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \boldsymbol{\phi}_k) = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_i^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \partial^i \phi_j^k(\mathbf{x}). \quad (3.94)$$

Die Knotenkraft  $f_k$  ist die zu  $\boldsymbol{\delta}_i^j$  duale Größe (Verschiebung ( $i = 0$ ) oder Spannung ( $i = 1$ )) der Einheitsverformung  $\boldsymbol{\phi}_k$  an der Stelle  $\mathbf{x}$  in Richtung von  $j$ .

Gesucht sei beispielsweise die Greensche Funktion  $G_{1xx}^h$  für die Spannung  $\sigma_{xx}$  im Punkt  $\mathbf{x}$ . Die äquivalenten Knotenkräfte zur Erzeugung dieser Greenschen Funktion ergeben sich aus

$$f_k = \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_1^{xx}(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} = \sigma_{xx}(\boldsymbol{\phi}_k)(\mathbf{x}). \quad (3.95)$$

Eine einzelne Knotenkraft  $f_k$  ist gerade die Spannung  $\sigma_{xx}$  im Punkt  $\mathbf{x}$  infolge der Einheitsverformung  $\boldsymbol{\phi}_k$ , d.h. wenn der Freiheitsgrad  $u_k$  um Eins ausgelenkt wird und alle anderen Freiheitsgrade den Wert Null besitzen.

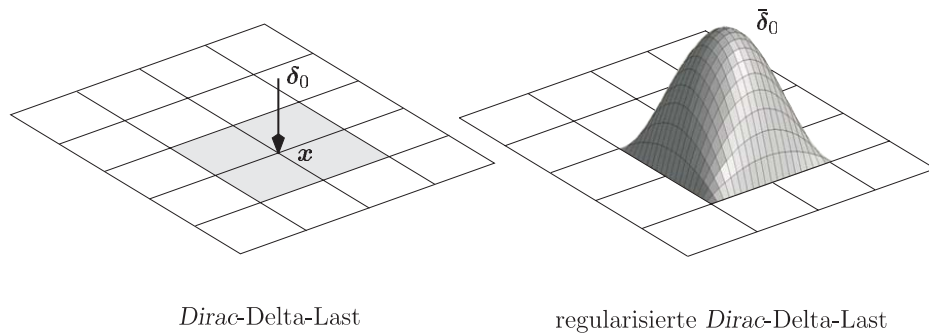
Analog hierzu kann die Berechnung der projizierten Greenschen Funktion für integrale Größen erfolgen. Gesucht sei die Greensche Funktion für eine integrale Spannung entlang eines Schnittes  $A$ - $A$ . Die äquivalenten Knotenkräfte zur Erzeugung dieser Greenschen Funktion erhält man, indem man in (3.94) die Spannungen entlang des Schnittes  $A$ - $A$  aufintegriert

$$f_k = \left( \int_A \boldsymbol{\delta}_1^j ds, \boldsymbol{\phi}_k \right) = \int_A \int_{\Omega} \boldsymbol{\delta}_1^j(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\phi}_k(\mathbf{y}) d\Omega_{\mathbf{y}} ds = \int_A \partial^1 \phi_j^k(\mathbf{x}) ds. \quad (3.96)$$

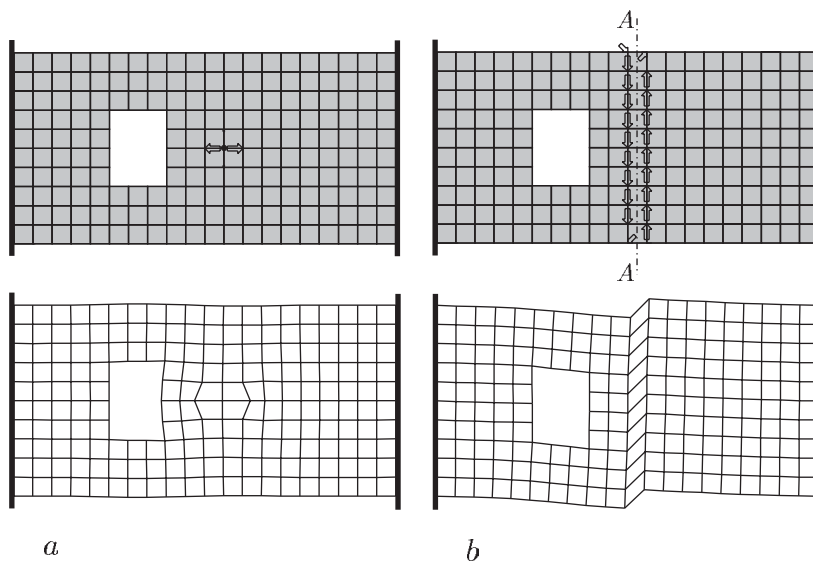
Die Knotenkraft  $f_k$  ist dann gerade die aufintegrierte Spannung in Richtung  $j$  entlang des Schnittes  $A$ - $A$  infolge der Einheitsverformung  $\boldsymbol{\phi}_k$ . Die praktische Berechnung der Knotenkräfte erfolgt dann elementweise. An den gemeinsamen Knoten zweier Elemente werden diese aufsummiert. Eine ausführliche Darstellung dieser Technik findet man in [18].

In der Literatur werden zur Berechnung der dualen Lösung häufig regularisierte Belastungen vorgeschlagen, um die Diskontinuitäten der Dirac-Delta-Funktionen zu umgehen, vgl. z.B. [12], [38]. In [38] wird beispielsweise eine Belastungsfunktion  $\bar{\delta}_0$  zur

Simulation der Diracschen-Delta-Funktion  $\delta_0$  verwendet, siehe Abb. 3.4. In praktischen Berechnungen hat sich jedoch gezeigt, dass sich ein FE-Programm eigentlich gar nicht darum kümmert, sondern die Greensche Funktion auf  $V_h$  so ermittelt, als wäre sie die Lösung eines regulären Problems [18].



**Abbildung 3.4:** Mögliche regularisierte Dirac-Delta-Funktion, [38].



**Abbildung 3.5:** a) Greensche Funktion für  $\sigma_{xx}$  im markierten Knoten b) Greensche Funktion für  $N_{xy}$  im Schnitt A-A

In Abb. 3.5 sind einmal exemplarisch zwei Greenschen Funktionen und die zugehörigen äquivalenten Knotenkräfte dargestellt. Die Greensche Funktion für  $\sigma_{xx}(\boldsymbol{x})$  erhält man, indem man den Punkt  $\boldsymbol{x}$  um Eins in  $x$ -Richtung auseinanderdrückt. Entsprechend erhält man die Greensche Funktion für  $N_{xy} = \int_A \sigma_{xy} ds$ , wenn man entlang des Schnittes A-A einen Versatz von Eins aufbringt. Die resultierenden Verformungsfiguren machen deutlich, dass diese Versätze auf dem FE-Netz nur näherungsweise darstellbar

sind, da es sich hierbei um Unstetigkeiten handelt.

### 3.4 Zielorientierte Fehlerschätzer

Die im Kapitel 3.2 vorgestellten globalen Fehlerschätzer liefern Aussagen über den globalen Fehler in der Energie. Im Rahmen von Netzverfeinerungsstrategien wird das Netz derart optimiert, dass in jedem Element eine vorgegebene Toleranzschranke nicht überschritten wird. Die globalen Fehlerschätzer liefern jedoch keine Aussage über die Güte einzelner lokaler Werte.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde gezeigt, dass die Güte einzelner Werte abhängig ist von der Güte der zugehörigen projizierten Greenschen Funktion. Bei den zielorientierten oder lokalen Fehlerschätzern wird nun diese Eigenschaft ausgenutzt, um einerseits Aussagen über den Fehler in der gesuchten Zielgröße machen zu können und andererseits das FE-Netz innerhalb von Netzverfeinerungsstrategien so zu optimieren, dass die gesuchte Zielgröße möglichst genau berechnet werden kann. Man bezeichnet diese Methoden auch als *Dualitätstechniken*, da man zusätzlich zum ursprünglichen Problem ein duales Problem lösen muss.

#### 3.4.1 Darstellung des Fehlers

Zur a posteriori Fehlerabschätzung bei zielorientierten Fehlerschätzern werden sowohl die Residuen des ursprünglichen Problems als auch die Residuen des dualen Problems benötigt. Das stetige und diskrete Variationsproblem des ursprünglichen Problems ist gegeben durch

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{und} \quad a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.97)$$

Entsprechend ist das stetige und diskrete Variationsproblem des dualen Problems gegeben durch

$$a(\mathbf{z}, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad \text{und} \quad a(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}_h) = J(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (3.98)$$

Ferner wird der Fehler des ursprünglichen Problems  $e := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  und der Fehler des dualen Problems  $e^* := \mathbf{z} - \mathbf{z}_h$  eingeführt. Die zugehörigen Residuen  $R(\cdot)$  und  $R^*(\cdot)$  sind definiert durch

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) := a(e, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V \quad (3.99)$$

$$R^*(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}) := a(e^*, \mathbf{v}) = J(\mathbf{v}) - a(\mathbf{z}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.100)$$

Gesucht sei nun der Fehler in einer Zielgröße  $J(\mathbf{u})$ . Dieser ergibt sich bei linearen Problemen aus

$$J(e) = J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = a(\mathbf{z}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = a(\mathbf{z}, e). \quad (3.101)$$

Aufgrund der Galerkin-Orthogonalität gilt

$$J(e) = a(\mathbf{z}, e) = a(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = a(e^*, \mathbf{u}) = F(e^*). \quad (3.102)$$

Dies führt auf die Definitionen des ursprünglichen und dualen Residuums  $R(\cdot)$  und  $R^*(\cdot)$ , [4]:

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) := F(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) - a(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = J(e) \quad (3.103)$$

$$R^*(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) := J(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - a(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = F(e^*) \quad (3.104)$$

Die Residuen sind demnach gleich, d.h.  $R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = R^*(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$ , da  $J(e) = F(e^*)$ . Man kann also den Fehler einer Zielgröße auf zwei verschiedene Arten berechnen. Zum einen kann man sich auf den Fehler in der Greenschen Funktion  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$  beziehen oder zum anderen auf den Fehler in der FE-Lösung  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$ :

$$J(e) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = R^*(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) \quad (3.105)$$

In Bezug auf die später folgende Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen, kann der Fehler alternativ auch dargestellt werden als

$$J(e) = \frac{1}{2} R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \frac{1}{2} R^*(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h). \quad (3.106)$$

Bei nichtlinearen Problemen sind die Residuen des ursprünglichen und dualen Problems nicht mehr gleich, siehe Kap. 4.3.1.



### 3.4.2 Residuenbasierende zielorientierte Fehlerschätzer

Die im Folgenden dargestellte Methode basiert auf den Arbeiten von RANNACHER, siehe z.B. [4], [7]. Diese wird als *dual-weighted-residual* (DWR) Methode bezeichnet und konnte unter anderem erfolgreich auf lineare und nichtlineare Probleme, Eigenwertprobleme und Problemstellungen in der Fluidmechanik angewendet werden.

Der Ausgangspunkt für eine exakte Fehlerdarstellung ist die in Kap. 3.2.2 angegebene Fehlergleichung für den Fehler  $e = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  der FE-Lösung des ursprünglichen Problems, vgl. Gl. (3.34),

$$a(e, \mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \, ds \right\} = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (3.107)$$

Hierbei bezeichnen  $\mathbf{r}$  und  $\mathbf{j}$  die Element- bzw. Sprungresiduen des ursprünglichen Problems, welche in den Gleichungen (3.35) und (3.36) definiert sind.

Zur Berechnung des Fehlers in der gesuchten Zielgröße geht man nun von der Fehlergleichung (3.101),

$$J(e) = a(e, \mathbf{z}),$$

aus. Ersetzt man  $\mathbf{v} = \mathbf{z} \in V$  in (3.107), so folgt

$$J(e) = a(e, \mathbf{z}) = \sum_{\Omega_e} \{(\mathbf{r}, \mathbf{z})_{\Omega_e} + (\mathbf{j}, \mathbf{z})_{\Gamma_e}\} = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}). \quad (3.108)$$

Unter Ausnutzung der Galerkin-Orthogonalität,  $a(e, \mathbf{z}_h) = 0$ , erhält man die folgende Darstellung für den Fehler in der Zielgröße:

$$J(e) = \sum_{\Omega_e} \{(\mathbf{r}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_{\Omega_e} + (\mathbf{j}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_{\Gamma_e}\} \quad (3.109)$$

Die Residuen des ursprünglichen Problems werden gewichtet mit dem Fehler in der verallgemeinerten Greenschen Funktion. Es ist daher anschaulich klar, dass der Fehler um so kleiner ist, je besser die echte Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  auf dem aktuellen Netz durch  $\mathbf{z}_h$  approximiert wird.

Innerhalb von adaptiven Verfahren wird daher versucht das Netz derart zu optimieren, dass der Abstand  $\mathbf{z} - \mathbf{z}_h$  möglichst klein wird. Hierzu sind lokale Verfeinerungsindikatoren  $\eta_e$  der Form

$$\eta_e := \{(\mathbf{r}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_{\Omega_e} + (\mathbf{j}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h)_{\Gamma_e}\} \quad (3.110)$$

zu bestimmen. Durch elementweise Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung und der Verwendung gewöhnlicher Interpolationsabschätzungen, folgt ein a posteriori Fehlerschätzer, d.h. eine obere Grenze für den Fehler, [4],

$$|J(\mathbf{e})| \leq \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e = \sum_{\Omega_e} \eta_e^{(p)} \eta_e^{(z)} \quad (3.111)$$

mit

$$\eta_e^{(p)} := \left\{ \|\mathbf{r}\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + h_e^{-1} \|\mathbf{j}\|_{L_2(\Gamma_e)}^2 \right\}^{1/2} \quad (3.112)$$

$$\eta_e^{(z)} := \left\{ \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{L_2(\Omega_e)}^2 + h_e \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_{L_2(\Gamma_e)}^2 \right\}^{1/2}. \quad (3.113)$$

Die *Gewichte* oder *Einflussfaktoren*  $\eta_e^{(z)}$  spiegeln hierbei den lokalen Charakter der verallgemeinerten Greenschen Funktion wieder.

Die exakte duale Lösung  $\mathbf{z}$  ist im Allgemeinen unbekannt. Zur Auswertung der Fehlerdarstellung (3.109) und der Fehlergrenze (3.111) braucht man daher eine gute Approximation der echten Greenschen Funktion  $\mathbf{z}$ , welche mit  $\tilde{\mathbf{z}}_h \in \tilde{V}_h$  bezeichnet wird. Der resultierende Fehlerschätzer erhält die Form

$$\eta = \left| \sum_{\Omega_e} \{(\mathbf{r}, \tilde{\mathbf{z}}_h - \mathbf{z}_h)_{\Omega_e} + (\mathbf{j}, \tilde{\mathbf{z}}_h - \mathbf{z}_h)_{\Gamma_e}\} \right|.$$

In [4] werden unter anderem folgende Möglichkeiten zur Bestimmung von  $\tilde{\mathbf{z}}_h$  vorgeschlagen:

- Lösung des dualen Problems mit Ansatzfunktionen höherer Ordnung auf dem aktuellen Netz, d.h. z.B. die Verwendung von biquadratischen Ansatzfunktionen anstelle von bilinearen Funktionen.
- Lösung des dualen Problems auf einem sehr feinen Netz.

- Bestimmung der dualen Lösung  $z_h$  auf dem aktuellen Netz. Verbesserung der Lösung durch Verwendung von Interpolationsfunktionen höherer Ordnung  $I_h^+ z_h$  auf einzelnen Teilgebieten.  $\rightarrow \tilde{z}_h = I_h^+ z_h$

In praktischen Berechnungen könnte gezeigt werden, dass die oben vorgestellte Methode enge Fehlergrenzen liefert [4]. Der Nachteil besteht jedoch darin, dass zum Teil ein erheblicher Aufwand betrieben werden muss, um eine gute Approximation der dualen Lösung zu bestimmen.

Aus diesem Grund werden in der Praxis häufig zielorientierte Fehlerschätzer basierend auf Fehlerabschätzungen in der Energienorm verwendet. Diese liefern zwar in der Regel zu pessimistische Fehlergrenzen, können jedoch erfolgreich als Fehlerindikator zur adaptiven Steuerung verwendet werden und sind relativ leicht zu implementieren.

### 3.4.3 Zielorientierte Fehlerschätzer in der Energienorm

Eine einfache und oft verwendete Methode zur lokalen Fehlerabschätzung erfolgt mit Hilfe der klassischen energienormbasierenden Fehlerschätzer, [12], [18]. Ausgangspunkt hierfür ist die Fehlergleichung (3.101)

$$J(\mathbf{e}) = a(\mathbf{z}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)$$

Unter Ausnutzung der Galerkin-Orthogonalität,  $a(\mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = 0$ , folgt

$$J(\mathbf{e}) = a(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) = a(\mathbf{e}^*, \mathbf{e}). \quad (3.114)$$

Durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung (3.40) erhält man eine obere Grenze für den Fehler

$$|J(\mathbf{e})| = |a(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h, \mathbf{u} - \mathbf{u}_h)| \leq \|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_E \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E. \quad (3.115)$$

Der Fehler in der Zielgröße wird demnach nach oben begrenzt durch den Energienormfehler  $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_E$  des ursprünglichen Problems gewichtet mit dem Energienormfehler des dualen Problems  $\|\mathbf{z} - \mathbf{z}_h\|_E$ .

Zur praktischen Berechnung wird die Cauchy-Schwarz-Ungleichung elementweise angewendet,

$$|J(\mathbf{e})| \leq \sum_{\Omega_e} \|z - z_h\|_{E(\Omega_e)} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega_e)} = \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e^{(z)} \eta_e^{(p)}. \quad (3.116)$$

Die Berechnung der Fehlerindikatoren des ursprünglichen Problems  $\eta_e^{(p)}$  und des dualen Problems  $\eta_e^{(z)}$  kann beispielsweise mittels (3.55), (3.61) oder einem anderen energienormbasierenden Fehlerschätzer erfolgen.

Mit  $|J(\mathbf{e})| \leq \eta$  und  $J(\mathbf{u}) = J(\mathbf{u}_h) + J(\mathbf{e})$  lässt sich der Fehler in der Zielgröße begrenzen durch

$$J(\mathbf{u}_h) - \eta \leq J(\mathbf{u}) \leq J(\mathbf{u}_h) + \eta. \quad (3.117)$$

Die Schrankeneigenschaften dieses Fehlerschätzer sind in der Regel nicht sehr scharf. Dennoch werden sie mit Erfolg eingesetzt, da sie gute Fehlerindikatoren zur adaptiven Netzverfeinerung darstellen, vgl. [12].

Eine Alternative zur Abschätzung mittels der Cauchy-Schwarz-Ungleichung besteht in der Anwendung der Parallelogrammidentität für symmetrische Bilinearformen, vgl. z.B. ODEN & PRUDHOMME in [32], auf die Fehlergleichung (3.114):

$$J(\mathbf{e}) = a(\mathbf{e}, \mathbf{e}^*) = \frac{1}{4} \|\mathbf{e} + \mathbf{e}^*\|_E^2 - \frac{1}{4} \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^*\|_E^2 \quad (3.118)$$

Es wird nun angenommen, dass die folgenden unteren und oberen Abschätzungen  $\eta_{low}^+$ ,  $\eta_{up}^+$ ,  $\eta_{low}^-$  und  $\eta_{up}^-$  derart existieren, so dass die Ungleichungen

$$\eta_{low}^+ \leq \|\mathbf{e} + \mathbf{e}^*\| \leq \eta_{up}^+ \quad (3.119)$$

$$\eta_{low}^- \leq \|\mathbf{e} - \mathbf{e}^*\| \leq \eta_{up}^- \quad (3.120)$$

erfüllt sind. Mit (3.118) erhält man eine Darstellung des Fehlers, der unteren und oberen Schrankeneigenschaften genügt:

$$\frac{1}{4} (\eta_{low}^+)^2 - \frac{1}{4} (\eta_{up}^-)^2 \leq J(\mathbf{e}) \leq \frac{1}{4} (\eta_{up}^+)^2 - \frac{1}{4} (\eta_{low}^-)^2 \quad (3.121)$$

Weitere Darstellungen zur konkreten Berechnung der Schranken sowie der Beweis der obigen Beziehungen findet man in [32].

### 3.4.4 Zusammenfassung

Mit Hilfe der in den vorangegangenen Abschnitten vorgestellten zielorientierten Fehlerschätzern kann der Fehler lokaler Werte abgeschätzt werden. Ferner erhält man Fehlerindikatoren, mit deren Hilfe sich das FE-Netz innerhalb von Netzverfeinerungsstrategien derart optimieren lässt, dass die gesuchte Zielgröße möglichst genau berechnet werden kann. Der Gesamtalgorithmus dieser als *Dualitätstechniken* bezeichneten Methoden kann bei linearen Problemen wie folgt zusammengefasst werden:

Gesucht sei ein Punktwert oder ein integraler Wert, welcher als Zielgröße  $J(\mathbf{u})$  bezeichnet wird. Dieser Wert kann berechnet werden, indem man ein Funktional  $J(\mathbf{u})$  auf die Lösung anwendet:

$$J(\mathbf{u}) = \partial^i u_j(\mathbf{x}) = (\boldsymbol{\delta}_i^j, \mathbf{u}) \quad \text{Punktwert}$$

$$J(\mathbf{u}) = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} ds \quad \text{integraler Wert}$$

Dies impliziert, dass eine verallgemeinerte Greensche Funktion  $\mathbf{z}$  derart existiert, dass  $J(\mathbf{u}) = F(\mathbf{z})$ .

Im Rahmen eines adaptiven Algorithmus zur Optimierung des Netzes sind dann die in Box 3.1 aufgeführten Schritte auszuführen. Die Anwendung dieses Verfahrens liefert automatisch ein Netz, welches optimal bezüglich der gesuchten Zielgröße  $J(\mathbf{u}_h)$  ist [25].

1. Generiere ein Startnetz  $\mathcal{T}_i$  und setze  $i = 0$ .

2. Formulierung und Lösung des ursprünglichen Problems

$$a(\mathbf{u}_h, \phi_k) = F(\phi_k) \quad \forall \phi_k \in V_h.$$

3. Formulierung und Lösung des dualen Problems

$$a(\mathbf{z}_h, \phi_k) = J(\phi_k) \quad \forall \phi_k \in V_h.$$

4. Optimierung des Netzes

- Berechnung der Fehlerindikatoren des ursprünglichen Problems  $\eta_e^{(p)}$  und des dualen Problems  $\eta_e^{(z)}$  in jedem Element  $\Omega_e$ .
- Bestimmung der resultierenden *gewichteten* Fehlerindikatoren

$$\eta_e = \eta_e^{(p)} \cdot \eta_e^{(z)}.$$

- Berechnung des Fehlerschätzers

$$J(\mathbf{e}) \approx \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e.$$

- IF  $|\eta| \leq TOL$  (globale Toleranz)  $\rightarrow$  ENDE
- IF  $\eta_e > TOL_e$  (Toleranz im Element)  $\rightarrow$  Verfeinere das Element  $\Omega_e$
- Generiere ein neues Netz  $\mathcal{T}_{i+1}$  und setze  $i = i + 1$ .
- GOTO 2

**Box 3.1:** Lösungsalgorithmus für zielorientierte Fehlerschätzer

# 4 Nichtlineare Probleme

Im vorliegenden Kapitel werden Methoden zur Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen vorgestellt. Die im vorangegangenen Kapitel gezeigten Dualitätstechniken sollen ganz allgemein auf nichtlineare Probleme übertragen werden. Abschließend erfolgt dann ein kurzer Blick auf Adaptionstrategien und praktische Aspekte innerhalb einer nichtlinearen adaptiven FE-Berechnung.

## 4.1 Vorbemerkungen

Die in der Strukturmechanik auftretenden Nichtlinearitäten sind vielfältig. Im Allgemeinen lassen sich Nichtlinearitäten in folgende Kategorien einordnen, wobei ein gleichzeitigen Auftreten möglich ist:

- **Geometrische Nichtlinearität:** große Verschiebungen und Verdrehungen bei kleinen Verzerrungen und linear elastischen Materialverhalten.
- **Große Deformationen:** große Verschiebungen und große Verzerrungen, wie z.B. bei Umformprozessen.
- **Physikalische Nichtlinearität:** bei nichtlinearem Materialverhalten.
- **Nichtlinearität infolge von Randbedingungen:** bei Problemen, bei denen Nichtlinearitäten infolge wechselnder Randbedingungen während des Deformationsvorgangs auftreten (Kontaktprobleme).

Die Nichtlinearität des betrachteten Randwertproblems überträgt sich mit der Diskretisierung auf das zugehörige diskrete Problem. Zur Lösung der nichtlinearen Gleichungen ist eine Linearisierung der betrachteten Gleichungen nötig. Die Lösung von nichtlinearen Problemen erhält man dann durch die Lösung mehrerer linearer Probleme innerhalb eines iterativen Algorithmus, wie z.B. dem Newton-Raphson-Verfahren, siehe Kap. 2.3.3.

Die Linearisierung erfolgt durch eine Darstellung der nichtlinearen Funktion in einer Taylor-Reihe mit abstrakten Ableitungen und genau definierten Resttermen. Speziell bei Fehlerabschätzungen werden hierfür verschiedene Darstellungsformen verwendet.

Die eigentliche Fehlerschätzung erfolgt dann für das linearisierte Problem. Damit lassen sich prinzipiell die im vorangegangenen Kapitel vorgestellten Fehlerschätzer für lineare Probleme direkt auf nichtlineare Probleme anwenden.

## 4.2 Globale Fehlerschätzer

Die Bestimmung der Fehler nichtlinearer Probleme erfolgt in der Regel durch geeignete Modifikation der linearen Fehlerschätzer. Im Rahmen von nichtlinearen Lösungsverfahren werden diese an den jeweiligen Gleichgewichtspunkten ausgewertet.

Gegeben sei ein nichtlineares Randwertproblem  $A(\mathbf{u}) = \mathbf{p}$  mit der zugehörigen schwachen Formulierung

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.1)$$

Betrachtet man das in Kap. 2.2.1 eingeführte nichtlineare Randwertproblem, dann ist die Semilinearform definiert durch

$$a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := (\mathbf{S}(\mathbf{u}), \mathbf{E}_u(\mathbf{v})) = \int_{\Omega} \mathbf{S} \cdot \mathbf{E}_u(\mathbf{v}) \, d\Omega \quad (4.2)$$

und das lineare Funktional  $F(\cdot)$  ist gegeben durch

$$F(\mathbf{v}) := (\mathbf{p}, \mathbf{v}) + (\bar{\mathbf{t}}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} \mathbf{p} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} \bar{\mathbf{t}} \cdot \mathbf{v} \, ds. \quad (4.3)$$



Die zugehörige Galerkin-Approximation zur Bestimmung der diskreten Lösung  $\mathbf{u}_h \in V_h$  lautet

$$a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = F(\mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V. \quad (4.4)$$

Wählt man in (4.1) als Testfunktion  $\mathbf{v}_h \in V_h \subset V$  und subtrahiert hiervon (4.4), dann lässt sich die fundamentale Galerkin-Orthogonalität für nichtlineare Probleme angeben [36]

$$R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := F(\mathbf{v}_h) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h. \quad (4.5)$$

Die Semilinearform  $a(\cdot; \cdot)$  ist nichtlinear im ersten Argument und linear in allen Argumenten rechts vom Semikolon, d.h. es gilt

$$a(\mathbf{u}_h + \mathbf{e}; \mathbf{v}) \neq a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) + a(\mathbf{e}; \mathbf{v}). \quad (4.6)$$

Hieraus folgt, dass die Fehlergleichung der linearen Theorie (3.30) nicht mehr gilt. Mit  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{e}$  lässt sich (4.1) folgendermaßen umschreiben

$$a(\mathbf{u}_h + \mathbf{e}; \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.7)$$

Um nun eine brauchbare Fehlergleichung zu bestimmen, wird (4.7) an der Stelle  $\mathbf{u}_h$  linearisiert, d.h. es erfolgt eine Entwicklung in eine Taylor-Reihe

$$a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) + a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) + \mathcal{R} = 0. \quad (4.8)$$

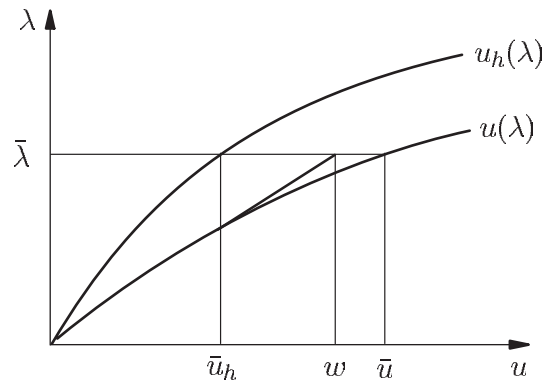
Hierbei ist  $a_T$  das Gateaux Differential

$$a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} a(\mathbf{u}_h + \varepsilon \mathbf{e}, \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} \quad (4.9)$$

was der gewöhnlichen Tangentenform entspricht, welche beispielsweise innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens verwendet wird. Die Linearisierung erfolgt an einem bekannten Zustand  $\mathbf{u}_h$ , d.h.  $\mathbf{u}_h$  ist fest. Die Tangentenform ist daher bilinear in den letzten beiden Argumenten und es gilt  $a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}, \mathbf{e})$ . Der Rest  $\mathcal{R}$  enthält Terme höherer Ordnung und kann in der Regel vernachlässigt werden, da davon ausgegangen wird, dass die FE-Lösung  $\mathbf{u}_h$  eine ausreichend gute Approximation der exakten Lösung  $\mathbf{u}$  darstellt [15]. Damit erhält man eine lineare Gleichung für den Diskretisierungsfehler am Linearisierungspunkt

$$a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}). \quad (4.10)$$

Der Diskretisierungsfehler  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  von nichtlinearen Problemen kann in erster Näherung aus dem linearisierten Problem ermittelt werden, wenn man die Verschiebung  $\mathbf{w}$  als Approximation der echten Lösung  $\mathbf{u}$  ansieht. In Abb. 4.1 ist der Linearisierungsprozess für ein eindimensionales Beispiel dargestellt. Hierbei bezeichnet  $\lambda$  einen skalaren Lastparameter. Der Fehler  $\mathbf{w} - \mathbf{u}_h$  ist somit die lineare Approximation des echten Fehlers  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  am betrachteten Linearisierungspunkt [19].



**Abbildung 4.1:** Linearisierte Fehlerschätzung bei nichtlinearen Problemen, [12].

Analog zur Vorgehensweise in Kapitel 3.2.2, erhält die Fehlergleichung durch partielle Integration der virtuellen inneren Arbeit die Form

$$a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{w} - \mathbf{u}_h, \mathbf{v}) = \sum_{\Omega_e} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{r} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{j} \cdot \mathbf{v} \, ds \right\} \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.11)$$

Die für lineare Probleme vorgestellten Fehlerindikatoren und Fehlerschätzer können nun direkt auf nichtlineare Probleme angewendet werden. Hierbei wird von dem inkrementellen Problem ausgegangen, welches am aktuellen Gleichgewichtspunkt formuliert wird.

Die zu bestimmenden Elementresiduen  $\mathbf{r}$  und Sprungresiduen  $\mathbf{j}$  sind vom jeweils gegebenen Randwertproblem abhängig. Für das in Kap. 2.2.1 eingeführte nichtlineare Randwertproblem sind diese wie folgt definiert:

$$\mathbf{r} := \mathbf{p} + \operatorname{div}(\mathbf{S}_h + \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{S}_h) \quad \text{auf } \Omega_e \quad (4.12)$$

$$\mathbf{j} := \begin{cases} \frac{1}{2}(\mathbf{t}_h + \mathbf{t}'_h) & \forall \gamma \notin \Gamma \\ \bar{\mathbf{t}} - \mathbf{t}_h & \forall \gamma \subset \Gamma_N \\ \mathbf{0} & \forall \gamma \subset \Gamma_D \end{cases} \quad (4.13)$$

mit

$$\mathbf{t}_h := (\mathbf{S}_h + \nabla \mathbf{u}_h \mathbf{S}_h) \mathbf{n}. \quad (4.14)$$

**Bemerkung 4.1** Bei den vorgenannten Beziehungen wurde vorausgesetzt, dass der betrachtete Gleichgewichtspunkt kein singulärer Punkt (Limit- oder Verzweigungspunkt) ist. In der Umgebung von singulären Punkten ist eine Taylorreihenentwicklung nicht möglich bzw. nicht eindeutig. Fehlerschätzer für diese Problemklassen findet man beispielsweise in [12], [37].

**Bemerkung 4.2** Die durch  $a_T(\mathbf{u}_h; \cdot, \cdot)$  induzierte Norm ist analog zur linearen Energienorm definiert und kann - vom physikalischen Standpunkt aus - auch als ein Maß für die Energie interpretiert werden. Das Maß für den Fehler kann verstanden werden, als die Energie die nötig ist, um das System vom betrachteten Zustand  $\mathbf{u}_h$  zu einem Zustand zu bewegen, der mit der aktuellen Lösung  $\mathbf{u}$  assoziiert werden kann [26].

### 4.3 Zielorientierte Fehlerschätzer

Die Motivation für die zielorientierten Fehlerschätzer bei linearen Problemen ist die Tatsache, dass sich jede lokale Größe aus der Überlagerung der projizierten Greenschen Funktion mit der Belastung berechnen lässt. Die Grundlage hierfür liefert der Satz von Betti. Bei linearen (selbstadjungierten) Problemen erhält man den Satz von Betti, indem man in der ersten Greenschen Identität  $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  die Plätze von  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{v}$  vertauscht und anschließend die Identitäten voneinander abzieht, siehe Kap. 3.1.2,

$$B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - G(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = 0.$$

Aufgrund der Symmetrie der Wechselwirkungsenergie,  $E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$ , kürzen sich die Energien heraus und es verbleiben nur noch die reziproken äußeren Arbeiten.

Die erste Greensche Identität  $G(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  der nichtlinearen Elastizitätstheorie (2.34) wurde in Kap. 2.2.2 angegeben. Bei nichtlinearen Problemen ist die fundamentale Symmetriebedingung verletzt, d.h.

$$E(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \neq E(\mathbf{v}, \mathbf{u}). \quad (4.15)$$

Damit kürzen sich bei der Formulierung  $B(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = G(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - G(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  die Terme  $E(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  und  $E(\mathbf{v}, \mathbf{u})$  nicht heraus. Der entstehende Ausdruck kann nicht als der Satz von Betti interpretiert werden [22].

Bei nichtlinearen Problemen gibt es daher keine Greenschen Funktionen im üblichen Sinn und der Satz von Betti besitzt keine Gültigkeit mehr. Dennoch lassen sich auch bei nichtlinearen Problemen zielorientierte Fehlerschätzer konstruieren. Hierfür wird das entsprechende duale Problem für das linearisierte ursprüngliche Problem formuliert.

### 4.3.1 Ein genereller Zugang

Im Folgenden soll ein abstrakter Zugang zur Berechnung des Fehlers  $J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h)$  bei nichtlinearen Problemen vorgestellt werden. Die hier gezeigte Methode basiert auf den Arbeiten von BANGERTH & RANNACHER [4] und BECKER & RANNACHER [7].

Es sei  $a(\mathbf{u}; \cdot)$  eine Semilinearform,  $F(\cdot)$  eine Linearform und  $J(\cdot)$  ein Funktionalwert, welcher nicht zwingend linear sein muss. Diese sind definiert auf einem nicht weiter spezifizierten Raum  $V$ . Gesucht sei die Lösung  $\mathbf{u} \in V$  des Variationsproblems

$$A(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) - F(\mathbf{v}) = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.16)$$

Die zugehörige Galerkin-Approximation lautet

$$A(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) := a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) - F(\mathbf{v}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_h \in V_h \subset V. \quad (4.17)$$

Das Ziel soll nun sein,  $J(\mathbf{u})$  aus der Lösung von (4.16) zu berechnen. Diese Aufgabe kann als ein restringiertes Optimierungsproblem für  $\mathbf{u} \in V$  aufgefasst werden:

$$J(\mathbf{u}) \rightarrow \min \quad \text{mit der Nebenbedingung} \quad A(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = 0. \quad (4.18)$$

Das Minimum von  $\mathbf{u}$  entspricht einem stationären Punkt  $\{\mathbf{u}, \mathbf{z}\} \in V \times V$  des Lagrangeschen Funktionals

$$L(\mathbf{u}; \mathbf{z}) := J(\mathbf{u}) - A(\mathbf{u}; \mathbf{z}). \quad (4.19)$$

Hierbei wurde die duale oder adjungierte Variable  $z \in V$  eingeführt, welche die Rolle des Lagrangeschen Multiplikators übernimmt. Das Lagrangesche Funktional ist dabei linear in  $z$ . Gesucht sei nun ein stationärer Punkt von  $L(\mathbf{u}; z)$ , d.h. die Lösung  $\{\mathbf{u}, z\} \in V \times V$  des Euler-Lagrange-Systems

$$L'(\mathbf{u}; z)(\varphi, \mathbf{v}) = \left\{ \begin{array}{l} J'(\mathbf{u}; \varphi) - A'(\mathbf{u}; \varphi, z) \\ - A(\mathbf{u}; \mathbf{v}) \end{array} \right\} = 0 \quad (4.20)$$

$$\forall \{\varphi, \mathbf{v}\} \in V \times V.$$

Die Gateaux Ableitungen von  $J(\mathbf{u})$  und  $A(\mathbf{u}; z)$  sind hierbei definiert durch

$$J'(\mathbf{u}; \varphi) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u} + \varepsilon \varphi) \right]_{\varepsilon=0} \quad (4.21)$$

und

$$A'(\mathbf{u}; \varphi, z) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} A(\mathbf{u} + \varepsilon \varphi; z) \right]_{\varepsilon=0}. \quad (4.22)$$

Die Galerkin-Approximation  $\{\mathbf{u}_h, z_h\} \in V_h \times V_h$  führt auf das diskrete Lagrangesche Funktional

$$L(\mathbf{u}_h; z_h) := J(\mathbf{u}_h) - A(\mathbf{u}_h; z_h) \quad (4.23)$$

und auf das diskrete Euler-Lagrange-System

$$L'(\mathbf{u}_h; z_h)(\varphi_h, \mathbf{v}_h) = \left\{ \begin{array}{l} J'(\mathbf{u}_h; \varphi_h) - A'(\mathbf{u}_h; \varphi_h, z_h) \\ - A(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) \end{array} \right\} = 0 \quad (4.24)$$

$$\forall \{\varphi_h, \mathbf{v}_h\} \in V_h \times V_h.$$

Die zweite Gleichung dieses Systems ist gerade das diskrete Variationsproblem (4.17) zur Bestimmung von  $\mathbf{u}_h$ . Die erste Gleichung ist das zusätzlich zu lösende diskrete duale Problem

$$A'(\mathbf{u}_h; \varphi_h, z_h) = J'(\mathbf{u}_h; \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (4.25)$$

zur Bestimmung der dualen Variable  $z_h$ . Hierbei entspricht  $A'$  der üblichen Tangentenform  $a_T$ , so dass  $z_h$  die Lösung von

$$a_T(\mathbf{u}_h; \varphi_h, z_h) = J'(\mathbf{u}_h; \varphi_h) \quad \forall \varphi_h \in V_h \quad (4.26)$$

ist. Im Folgenden soll nun der Fehler in der Zielgröße  $J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h)$  abgeschätzt werden. Im obigen Kontext ist dies mit Hilfe von (4.19) und (4.23) äquivalent zu der Abschätzung

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = L(\mathbf{u}; \mathbf{z}) - L(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h) = \frac{1}{2} \tilde{L}' + \mathcal{R}_h^{(3)} \quad (4.27)$$

mit

$$\begin{aligned} \tilde{L}' &:= L'_u(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + L'_z(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h)(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) \\ &= J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - A'(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h) - A(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Hieraus erhält man die folgende Darstellung für den Fehler in der Zielgröße:

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) = \frac{1}{2} R(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) + \frac{1}{2} R^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) + \mathcal{R}_h^{(3)}. \quad (4.29)$$

Das Residuum des ursprünglichen Problems  $R(\mathbf{u}_h; \cdot)$  und das Residuum des dualen Problems  $R^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \cdot)$  sind hierbei definiert durch

$$R(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) := -A(\mathbf{u}_h; \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) \quad (4.30)$$

$$R^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) := J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h) - A'(\mathbf{u}_h; \mathbf{u} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h). \quad (4.31)$$

Im Gegensatz zu linearen Problemen sind die Residuen  $R(\mathbf{u}_h; \cdot)$  und  $R^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \cdot)$  im nichtlinearen Fall nicht mehr gleich, siehe Kap. 3.4.1. Der Rest  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  ist kubisch im ursprünglichen und im dualen Fehler  $\mathbf{e} := \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{e}^* := \mathbf{z} - \mathbf{z}_h$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_h^{(3)} &:= \frac{1}{2} \int_0^1 \{ J'''(\mathbf{u}_h + s\mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{e}) - A'''(\mathbf{u}_h + s\mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{z}_h + s\mathbf{e}^*) \\ &\quad 3A''(\mathbf{u}_h + s\mathbf{e})(\mathbf{e}, \mathbf{e}, \mathbf{e}^*) \} s(s-1) ds. \end{aligned}$$

Auf den Beweis der vorgenannten Beziehungen soll an dieser Stelle verzichtet werden. Diesen findet man beispielsweise in [4] und [7].

Gewöhnlich ist der Rest  $\mathcal{R}_h^{(3)}$  in (4.29) sehr klein und kann vernachlässigt werden. Die Auswertung des resultierenden Fehlerschätzers erfordert gute Approximationen der unbekannt exakten Lösungen  $\mathbf{u}$  und  $\mathbf{z}$ , welche beispielsweise mittels Interpolationen höherer Ordnung aus den diskreten Lösungen  $\mathbf{u}_h$  und  $\mathbf{z}_h$  gewonnen werden können. Bezeichnet man diese Approximationen mit  $\tilde{\mathbf{u}}_h$  und  $\tilde{\mathbf{z}}_h$ , dann erhält der Fehlerschätzer die Form

$$J(\mathbf{u}) - J(\mathbf{u}_h) \approx \eta := \frac{1}{2} R(\mathbf{u}_h; \tilde{\mathbf{z}}_h - \mathbf{z}_h) + \frac{1}{2} R^*(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}_h; \tilde{\mathbf{u}}_h - \mathbf{u}_h). \quad (4.32)$$

### 4.3.2 Alternativen

Alternativ zu der oben gezeigten Vorgehensweise soll im Folgenden ein etwas ingenieurmäßigerer Zugang skizziert werden [15], [19], [25]. Ausgangspunkt ist die linearisierte Fehlergleichung (4.10),

$$a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) = F(\mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}). \quad (4.33)$$

Zur Berechnung des Fehlers in einer Zielgröße wird die duale Bilinearform  $a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v})$  eingeführt, welche durch die Identität

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) := a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}, \mathbf{e}) \quad (4.34)$$

definiert ist. Im Fall von Hyperelastizität ist  $a_T$  symmetrisch in den letzten beiden Argumenten und es gilt  $a_T = a_T^*$ , [36].

Das zusätzlich zu lösende lineare duale Problem wird am betrachteten Linearisierungspunkt  $\mathbf{u}_h$  formuliert. Gesucht sei die Lösung  $\mathbf{z}$  von

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}, \mathbf{z}) = J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.35)$$

Das Funktional  $J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v})$  ist hierbei definiert durch

$$J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u}_h + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0}. \quad (4.36)$$

Kombiniert man nun (4.33) und (4.35), so folgt aufgrund der Symmetrie der Bilinearform

$$J(\mathbf{e}) = J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}) = a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z}) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z}). \quad (4.37)$$

Der echte Fehler  $\mathbf{e} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  am betrachteten Linearisierungspunkt wird nun durch die lineare Approximation des Fehlers  $\mathbf{w} - \mathbf{u}_h$  ersetzt. Durch Anwendung der Galerkin-Orthogonalität,  $a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z}_h) = 0$ , erhält man

$$J(\mathbf{w} - \mathbf{u}_h) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{w} - \mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = R(\mathbf{u}_h, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \quad (4.38)$$

Durch elementweise Auswertung dieser Gleichung ergibt sich die folgende Darstellung für den Fehler:

$$J(\mathbf{w} - \mathbf{u}_h) = \sum_{\Omega_e} \left\{ \int_{\Omega_e} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) d\Omega + \int_{\Gamma_e} \mathbf{j} \cdot (\mathbf{z} - \mathbf{z}_h) ds \right\} \quad (4.39)$$

Zur Auswertung dieser Gleichung kann beispielsweise die in Kap. 3.4.2 vorgestellte *dual-weighted-residual* Methode verwendet werden.

Eine einfache Abschätzung in der Energienorm erhält man durch Anwendung der Cauchy-Schwarz-Ungleichung auf die Bilinearform in (4.38)

$$|J(\mathbf{w} - \mathbf{u}_h)| \leq \|z - z_h\|_E \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_h\|_E, \quad (4.40)$$

welche wieder elementweise ausgewertet wird und somit eine obere Grenze für den Fehler liefert

$$|J(\mathbf{w} - \mathbf{u}_h)| \leq \sum_{\Omega_e} \|z - z_h\|_{E(\Omega_e)} \|\mathbf{w} - \mathbf{u}_h\|_{E(\Omega_e)} = \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e^{(z)} \eta_e^{(p)}. \quad (4.41)$$

Die Berechnung der Fehlerindikatoren des ursprünglichen Problems  $\eta_e^{(p)}$  und des dualen Problems  $\eta_e^{(z)}$  kann beispielsweise mittels (3.55), (3.61) oder einem anderen energienormbasierenden Fehlerschätzer erfolgen.

In der Literatur findet man zur Bestimmung des Fehlers einer Zielgröße noch eine etwas andere Technik [16], [36]. Hierbei ersetzt man die Tangentenform  $a_T$  durch die Sekantenform

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) := \int_0^1 a_T(\mathbf{u}_h + s \mathbf{e}; \mathbf{e}, \mathbf{v}) ds. \quad (4.42)$$

Diese ist im Allgemeinen nicht symmetrisch, aber bilinear in  $\mathbf{e}$  und  $\mathbf{v}$ . Der Fehler  $\mathbf{e}$  ist dann die Lösung der linearen Variationsgleichung

$$a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{v}) = a(\mathbf{u}; \mathbf{v}) - a(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) = R(\mathbf{v}). \quad (4.43)$$

Man erhält eine exakte Darstellung für den Fehler, was jedoch die Kenntnis der exakten Lösung voraussetzt.

Analog hierzu wird die Sekantenform des Funktionals  $J(\mathbf{u})$  eingeführt

$$J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{v}) := \int_0^1 J'(\mathbf{u}_h + s \mathbf{e}; \mathbf{v}) ds. \quad (4.44)$$

Das entsprechende duale Problem zur Bestimmung von  $z$  lautet dann

$$a_S^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; z, \mathbf{v}) = J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.45)$$



Unter der Voraussetzung, dass die duale Bilinearform symmetrisch in den letzten beiden Argumenten ist, d.h.  $a_S^*(\cdot, \cdot; \mathbf{z}, \mathbf{v}) = a_S(\cdot, \cdot; \mathbf{v}, \mathbf{z})$ , erhält man aus (4.45) und (4.43)

$$J(\mathbf{e}) = J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}) = a_S^*(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{e}) = a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z}) = R(\mathbf{z}). \quad (4.46)$$

Mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität folgt eine exakte Darstellung für den Fehler in der Zielgröße

$$J(\mathbf{e}) = J_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}) = a_S(\mathbf{u}, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = R(\mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \quad (4.47)$$

Sowohl  $a_S^*$  als auch  $J_S$  beinhaltet die unbekannte exakte Lösung  $\mathbf{u}$ . Ersetzt man die exakte Lösung durch die FE-Approximation  $\mathbf{u}_h$ , dann erhält man gerade wieder (4.38),

$$J(\mathbf{e}) = J_S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}) = a_S(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h) = a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{e}, \mathbf{z} - \mathbf{z}_h). \quad (4.48)$$

An dieser Stelle stellt sich natürlich die Frage, warum man den ganzen Aufwand betreibt, wenn am Ende doch wieder die gewöhnliche Tangentenform herauskommt. Es hat sich jedoch gezeigt, dass unter bestimmten Umständen die gezeigte Technik von Vorteil sein kann. In diesen Fällen kann beispielsweise eine verbesserte Lösung von  $\mathbf{u}_h$  verwendet werden [29].

### 4.3.3 Berechnung des dualen Problems

Bei der Fehlerschätzung mittels dualer Methoden muss zusätzlich zum ursprünglichen Problem ein weiteres linearisiertes duales Problem gelöst werden. Bei nichtlinearen Problemen wird das duale Problem am betrachteten Linearisierungspunkt formuliert

$$a_T^*(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}, \mathbf{v}) = J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V. \quad (4.49)$$

Die Tangentenform  $a_T^*$  des dualen Problems entspricht der Tangentenform  $a_T$  des ursprünglichen Problems am Gleichgewichtspunkt. Bei der praktischen Berechnung entspricht also die tangentielle Steifigkeitsmatrix  $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h)$  des ursprünglichen Problems am Gleichgewichtspunkt der Steifigkeitsmatrix des dualen Problems, so dass  $\mathbf{z}_h$  die Lösung von

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h) \mathbf{z} = \mathbf{j} \quad (4.50)$$

ist. Zur numerischen Lösung des dualen Problems muss daher nur der duale Lastvektor  $j$  bestimmt werden. Die äquivalenten Knotenkräfte  $j_k$  erhält man wie bei linearen Problemen, vgl. Kap. 3.3.4, aus der rechten Seite der diskreten Variationsgleichung

$$a_T(\mathbf{u}_h; \mathbf{z}_h, \phi_k) = J'(\mathbf{u}_h; \phi_k) \quad \forall \phi_k \in V_h. \quad (4.51)$$

Hierbei bezeichnet  $\phi_k$  die Knoteneinheitsverformung am Freiheitsgrad  $u_k$ . Die äquivalenten Knotenkräfte sind abhängig von der Gestalt des Funktionals  $J(\mathbf{u})$ . Ist  $J(\mathbf{u})$  linear, dann ist  $J'(\mathbf{u}; \phi_k) = J(\phi_k)$ , so dass  $j_k = J(\phi_k)$ . Für den Fall, dass  $J(\mathbf{u})$  nichtlinear ist, erhält man die Knotenkräfte aus

$$j_k = J'(\mathbf{u}_h; \phi_k). \quad (4.52)$$

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Konzept für das in Kap. 2.2.1 eingeführte Randwertproblem für geometrische Nichtlinearität umgesetzt. Hierbei kam das *St. Venant-Kirchhoff*-Material zum Einsatz. Die Spannungen für dieses Problem erhält man aus  $\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]$ . Der Verzerrungstensor  $\mathbf{E}$  enthält nichtlineare Anteile in  $\mathbf{u}$ , so dass im Fall einer gesuchten Spannung das Funktional  $J(\mathbf{u})$  nichtlinear ist.

Gesucht sei nun eine lokale Spannung  $S_{ij}(\mathbf{x})$  in einem Punkt  $\mathbf{x}$ , d.h.

$$J(\mathbf{u}) = S_{ij}(\mathbf{u})(\mathbf{x}). \quad (4.53)$$

Das linearisierte Funktional folgt aus der Gateaux Ableitung von  $J(\mathbf{u})$ ,

$$J'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) := \left[ \frac{d}{d\varepsilon} J(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} = \left[ \frac{d}{d\varepsilon} S_{ij}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0}. \quad (4.54)$$

Mit  $\mathbf{S} = \mathbf{C}[\mathbf{E}(\mathbf{u})]$  entnimmt man den gesuchten Wert somit aus

$$\left[ \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{S}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} = \mathbf{C} \left[ \frac{d}{d\varepsilon} \mathbf{E}(\mathbf{u} + \varepsilon \mathbf{v}) \right]_{\varepsilon=0} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_u(\mathbf{v})] =: \hat{\mathbf{S}}. \quad (4.55)$$

Hierbei bezeichnet  $\mathbf{E}_u(\mathbf{v})$  die Variation des *Green-Lagrangeschen* Verzerrungstensors, vgl. Gl. (2.32). Die Spannungen, welche man aus  $\mathbf{C}[\mathbf{E}_u(\mathbf{v})]$  ermittelt, können als Spannungsinkremente oder Spannungszuwächse bezogen auf den aktuellen Linearisierungspunkt interpretiert werden. Bezeichnet man diese Zuwächse mit  $\hat{\mathbf{S}} = \mathbf{C}[\mathbf{E}_u]$ , dann folgt für das linearisierte Funktional (4.54)

$$J'(\mathbf{u}; \mathbf{v}) = \hat{S}_{ij}(\mathbf{v})(\mathbf{x}) \quad (4.56)$$

bzw. die diskrete Form

$$J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = \hat{S}_{ij}(\mathbf{v}_h)(\mathbf{x}). \quad (4.57)$$

Die äquivalenten Knotenkräfte  $j_k$  erhält man nun, wenn  $\mathbf{v}_h$  durch die Knoteneinheitsverformungen  $\phi_k$  ersetzt wird,

$$j_k = J'(\mathbf{u}_h; \phi_k) = \hat{S}_{ij}(\phi_k)(\mathbf{x}). \quad (4.58)$$

Die Knotenkraft  $j_k$  ist gerade die Spannung  $\hat{S}_{ij}$  an der Stelle  $\mathbf{x}$ , die infolge der Einheitsverformung  $\phi_k$  entsteht. Die Spannung  $\hat{S}_{ij}$  erhält man hierbei aus  $C[\mathbf{E}_u(\phi_k)]$ .

Analog hierzu kann die Berechnung der dualen Lösung für integrale Größen erfolgen. Gesucht sei eine integrale Spannung entlang eines Schnittes  $A$ - $A$ , d.h.

$$J(\mathbf{u}) = \int_A S_{ij}(\mathbf{u}) ds. \quad (4.59)$$

Das zugehörige linearisierte Funktional ergibt sich zu

$$J'(\mathbf{u}_h; \mathbf{v}_h) = \int_A \hat{S}_{ij}(\mathbf{v}_h) ds. \quad (4.60)$$

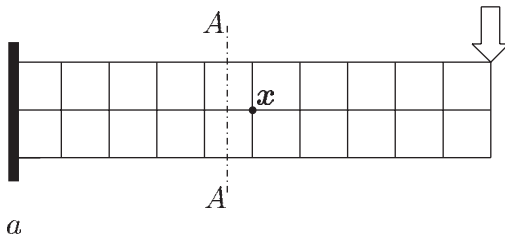
Die äquivalenten Knotenkräfte zur Erzeugung der dualen Lösung erhält man nun, indem die Spannungen  $\hat{S}_{ij}$  infolge der Einheitsverformungen  $\phi_k$  entlang des Schnittes  $A$ - $A$  aufintegriert werden:

$$j_k = J'(\mathbf{u}_h; \phi_k) = \int_A \hat{S}_{ij}(\phi_k) ds \quad (4.61)$$

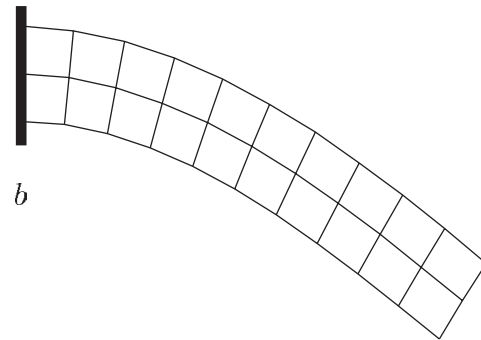
In Abb. 4.2 ist die Vorgehensweise zur Bestimmung der dualen Lösung für die Spannung  $S_{yy}(\mathbf{x})$  und für die integrale Spannung  $\int_A S_{xy} ds$  dargestellt. Betrachtet wird ein Kragbalken mit großen Verformungen unter einer Einzellast, 4.2a. Das ursprüngliche Problem wird im aktuellen Lastschritt mittels eines iterativen Verfahrens gelöst. Das duale Problem wird nun am gefundenen Gleichgewichtspunkt formuliert, d.h. am verformten System in der momentanen Laststufe, 4.2b. Die duale Lösung für  $S_{yy}$  im markierten Punkt ist eine Punktversetzung um Eins. Die hierfür erforderlichen äquivalenten Knotenkräfte sind in Abb. 4.2c dargestellt. Die Knotenkräfte  $j$  erhält man unter Verwendung von Gl. (4.58) aus

$$j_k = J'(\mathbf{u}_h; \phi_k) = \hat{S}_{yy}(\phi_k)(\mathbf{x}). \quad (4.62)$$

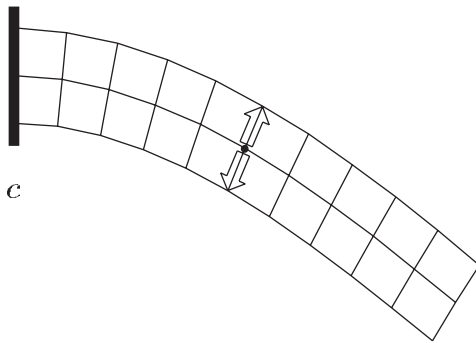
ursprüngliches Problem



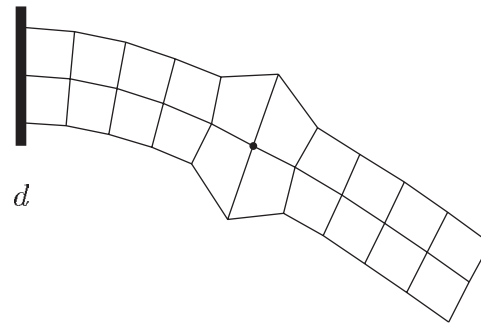
a



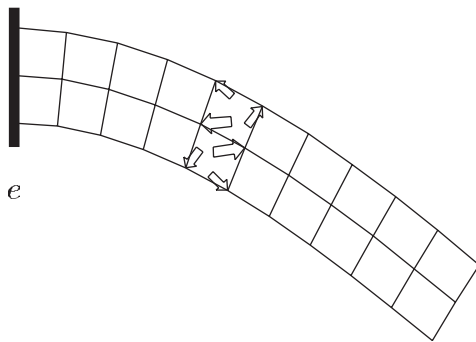
b

duales Problem für  $S_{yy}(\mathbf{x})$ 

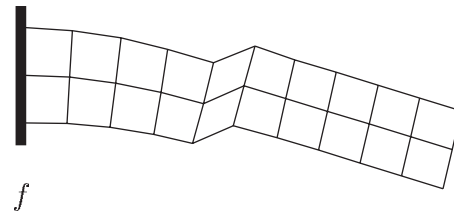
c



d

duales Problem für  $\int_A S_{xy} ds$ 

e



f

**Abbildung 4.2:** Kragbalken mit großen Verformungen a) Belastung des ursprünglichen Problems b) Verformung des ursprünglichen Problems am Gleichgewichtspunkt c) äquivalente Knotenkräfte des dualen Problems für  $S_{yy}(\mathbf{x})$  am Gleichgewichtspunkt d) FE-Approximation der dualen Lösung für  $S_{yy}(\mathbf{x})$  e) äquivalente Knotenkräfte des dualen Problems für  $\int_A S_{xy} ds$  im Schnitt A-A f) FE-Approximation der dualen Lösung für  $\int_A S_{xy} ds$

Dieser Lastfall wird nun gelöst, wobei die zugehörige Steifigkeitsmatrix der tangentialen Steifigkeitsmatrix des ursprünglichen Problems im Gleichgewichtspunkt entspricht, d.h. man löst  $\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_h) \mathbf{z} = \mathbf{j}$ . Das Resultat ist die FE-Approximation der dualen Lösung für  $S_{yy}$  am verformten System, siehe Abb. 4.2d.

Entsprechend erfolgt die Vorgehensweise zur Bestimmung der dualen Lösung für die integrale Spannung  $\int_A S_{xy} ds$ . Die duale Lösung für dieses Problem ist ein Versatz von Eins im Schnitt  $A-A$  am verformten System, siehe Abb. 4.2f. Die zugehörigen äquivalenten Knotenkräfte sind in Abb. 4.2e dargestellt. Diese erhält man unter Verwendung von (4.61).

## 4.4 Adaptionstrategien und Netzverfeinerung

Im Folgenden werden einige Aspekte vorgestellt, welche im Rahmen einer nichtlinearen adaptiven FE-Berechnung benötigt werden. Hierbei kann natürlich nur auf die wichtigsten Punkte Bezug genommen werden, da die Darstellung des gesamten Spektrums den Rahmen dieser Arbeit sprengen würde. Ausführliche Darstellungen findet man beispielsweise in [12], [38].

Die Anpassung der FE-Diskretisierung an eine berechnete oder abgeschätzte Fehlerverteilung kann grundsätzlich durch verschiedene Adaptionstrategien vorgenommen werden:

- ***h-Adaption***

Anpassung der charakteristischen Elementgröße  $h_e$  an die lokale Fehlerverteilung. Das FE-Netz wird lokal verfeinert oder vergrößert.

- ***p-Adaption***

Anpassung des Polynomgrades  $p$  an die lokale Fehlerverteilung. Die Elementgröße  $h_e$  bleibt unverändert.

- ***hp-Adaption***

Anpassung der charakteristischen Elementgröße  $h_e$  und des Polynomgrades  $p$ .

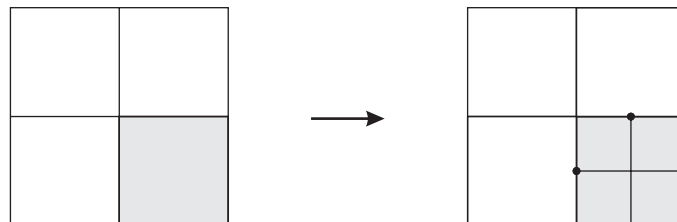
- ***r-Adaption***

Neuvernetzung mit gleich bleibender Anzahl der Freiheitsgrade.

- ***d- und m-Adaption***

Dimensions- und Modelladaptivität. Bei der Dimensionsadaptivität wird die gewählte Raumdimension angepasst. Bei der Modelladaptivität wird das verwendete mechanische Modell an den Modellierungsfehler angepasst.

Im Rahmen dieser Arbeit werden nur  $h$ -adaptive Verfahren betrachtet. Dabei kommt eine hierarchische Netzverfeinerung mit *hanging nodes* zum Einsatz. Bei dem Konzept der 'hängenden Knoten' wird jedes zu verfeinernde Element in vier weitere Elemente zerteilt, siehe Abb. 4.3. Hierbei entstehen an angrenzenden Elementen, welche nicht selbst verfeinert wurden, die so genannten hängenden Knoten, für welche keine Anschlußfreiheitsgrade vorhanden sind. Im Rahmen der FE-Berechnung werde diese Knoten durch Interpolation der Verschiebungen zwischen den benachbarten regulären Knoten eliminiert.



**Abbildung 4.3:** Netzverfeinerung mit hängenden Knoten

#### 4.4.1 Netzverfeinerung

Die adaptive Netzverfeinerung innerhalb einer FE-Berechnung entspricht insgesamt einem Optimierungsproblem. Das Netz ist optimal, wenn mit einer möglichst geringen Anzahl von Freiheitsgraden der geschätzte Fehler  $\eta$  kleiner als eine vom Benutzer vorgegebene Toleranz ist. Da die exakte Lösung unbekannt ist, sollte der Fehler möglichst in allen Elementen gleich groß und damit gleichmäßig über das gesamte Netz verteilt sein [44].

Zur adaptiven Netzverfeinerung müssen die berechneten Fehlerschätzer noch nachbearbeitet werden. Anhand einer vorgegebenen Toleranz werden zulässige Fehler im Element berechnet, welche zusammen mit dem Fehlerindikator des Elements ein Kriterium liefern, ob das betrachtete Element verfeinert werden soll oder nicht. Hierbei gibt es bei globalen und zielorientierten Fehlerschätzern unterschiedliche Vorgehensweisen.

### Globale Fehlerschätzer in der Energienorm

Mit den in den vorangegangenen Kapiteln vorgestellten a posteriori Fehlerschätzern wird der Fehler in der Energienorm

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \eta = \left\{ \sum_e \eta_e^2 \right\}^{1/2} \quad (4.63)$$

berechnet. Dieser setzt sich aus den Anteilen der einzelnen Elemente  $\eta_e$  zusammen. Bei den berechneten Fehlerindikatoren  $\eta_e$  und dem Fehlerschätzer  $\eta$  handelt es sich um absolute Größen. Als Maße für die relativen Fehler werden daher

$$\eta^{rel} := \frac{\eta}{\|\mathbf{u}\|_E} \quad \text{und} \quad \eta_e^{rel} := \frac{\eta_e}{\|\mathbf{u}_e\|_E} \quad (4.64)$$

eingeführt. Da die exakte Lösung  $\mathbf{u}$  im Allgemeinen unbekannt ist, wird diese durch  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \mathbf{e}$  ersetzt. Mit Hilfe der Galerkin-Orthogonalität,  $a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}) = 0$ , gilt

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}\|_E^2 &= a(\mathbf{u}, \mathbf{u}) = a(\mathbf{u}_h + \mathbf{e}, \mathbf{u}_h + \mathbf{e}) \\ &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + 2a(\mathbf{u}_h, \mathbf{e}) + a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) \\ &= a(\mathbf{u}_h, \mathbf{u}_h) + a(\mathbf{e}, \mathbf{e}) = \|\mathbf{u}_h\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2. \end{aligned} \quad (4.65)$$

Damit ergeben sich die relativen Fehler zu

$$\eta^{rel} = \frac{\eta}{\sqrt{\|\mathbf{u}_h\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2}} \quad \text{und} \quad \eta_e^{rel} = \frac{\eta_e}{\sqrt{\|\mathbf{u}_{h_e}\|_E^2 + \|\mathbf{e}_e\|_E^2}}. \quad (4.66)$$

Die relativen Fehler geben näherungsweise den Fehler in der Energienorm an. Um den relativen Fehler im Element berechenbar zu machen, wird  $\|\mathbf{e}_e\|_E^2$  durch  $\eta_e^2$  ersetzt.

$$\eta_e^{rel} = \frac{\eta_e}{\sqrt{\|\mathbf{u}_{h_e}\|_E^2 + \eta_e^2}} \quad (4.67)$$

Für eine vom Anwender vorgegebene Toleranz  $TOL$ , welche in der Praxis beispielsweise  $TOL = 0.03 - 0.05$  beträgt, erhält man den zulässigen Fehler  $\eta^{zul}$  im Element aus

$$\eta^{zul} := TOL \cdot \sqrt{\frac{\|\mathbf{u}_h\|_E^2 + \eta^2}{N}}. \quad (4.68)$$

Hierbei bezeichnet  $N$  die Anzahl aller Elemente, vgl. [28]. Aus dem Verhältnis der geschätzten Fehler  $\eta_e$  und dem angestrebten zulässigen Fehler  $\eta^{zul}$ , erhält man nun ein Kriterium, ob das Element  $\Omega_e$  verfeinert werden soll oder nicht:

$$\xi_e := \frac{\eta_e}{\eta^{zul}} = \begin{cases} > 1, & \text{Element verfeinern} \\ < 1, & \text{Element vergrößern} \\ = 1, & \text{keine Änderung.} \end{cases} \quad (4.69)$$

Die ermittelten  $\xi_e$  werden ihrer Größe nach in eine Liste einsortiert. Alle Elemente  $\Omega_e$  mit  $\xi_e > 1$  wären dann zu verfeinern. In der Praxis hat sich jedoch als sinnvoll herausgestellt, dass man nur die ersten 30 – 70 % der Elemente mit  $\xi_e > 1$  verfeinert, da sich sonst die Problemzonen nicht so klar herauskristallisieren, [24].

### Zielorientierte Fehlerschätzer

Bei den zielorientierten Fehlerschätzern erhält man den Fehler in der Zielgröße  $J(\mathbf{u})$  aus der elementweisen Wichtung des Fehlers des ursprünglichen Problems  $\eta_e^{(p)}$  mit dem Fehler des dualen Problems  $\eta_e^{(z)}$ :

$$|J(\mathbf{e})| \leq \eta = \sum_e \eta_e = \sum_e \eta_e^{(p)} \eta_e^{(z)} \quad (4.70)$$

Der relative Fehler berechnet sich aus

$$\eta^{rel} := \left| \frac{J(\mathbf{e})}{J(\mathbf{u})} \right| \approx \left| \frac{\eta}{J(\mathbf{u}_h)} \right|. \quad (4.71)$$

Alternativ kann der relative Fehler mit Hilfe einer Referenzlösung  $J(\mathbf{u}_{ref})$  angegeben werden, welche beispielsweise auf einem sehr feinen Netz berechnet wurde [4],

$$\eta^{rel} = \left| \frac{J(\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h)}{J(\mathbf{u}_{ref})} \right|. \quad (4.72)$$



Für eine vorgegebene Toleranz erhält man den zulässigen Fehler  $\eta^{zul}$  im Element

$$\eta^{zul} = TOL \cdot \frac{J(\mathbf{u}_h)}{N} \quad (4.73)$$

und schließlich ein Kriterium zur Netzadaption

$$\xi_e = \frac{\eta_e}{\eta^{zul}}, \quad (4.74)$$

welches analog zu (4.69) ausgewertet wird.

## 4.4.2 Gesamtalgorithmus einer nichtlinearen adaptiven Berechnung

Ausgangspunkt jeder adaptiven Netzverfeinerungsstrategie ist eine homogene Ausgangsdiskretisierung, welche das betrachtete Gebiet ausreichend gut abbildet. Im Rahmen einer inkrementellen Betrachtung, bei der die gesamte Belastung in Lastinkremente zerlegt wird, erfolgt eine Fehlerabschätzung in jedem Lastschritt. Dies setzt voraus, dass im aktuellen Lastschritt ein entsprechender Gleichgewichtspunkt gefunden wird, d.h. wenn innerhalb des Newton-Raphson-Verfahrens die Ungleichgewichtskräfte  $\mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u})$  minimiert sind.

Im Rahmen der vorliegenden Arbeit wurde das Konzept für das in Kap. 2.2.1 eingeführte Randwertproblem für geometrische Nichtlinearität umgesetzt. Die Abschätzung des Fehlers erfolgt mit Hilfe eines Fehlerschätzers in der Energienorm. Der implementierte Algorithmus ist in vereinfachter Form in Box 4.1 dargestellt.

Zunächst wird das ursprüngliche Problem im aktuellen Lastschritt mit Hilfe des Newton-Raphson-Verfahrens iterativ gelöst und es werden die Fehlerindikatoren  $\eta_e^{(p)}$  berechnet. Anschließend wird das duale Problem am aktuellen Gleichgewichtspunkt formuliert und gelöst. Die Steifigkeitsmatrix des dualen Problems ist hierbei gerade die tangentielle Steifigkeitsmatrix des letzten Iterationsschrittes des ursprünglichen Problems. Nach der Berechnung der Fehlerindikatoren  $\eta_e^{(z)}$  des dualen Problems wird der Fehler berechnet und das Netz entsprechend verfeinert. Dies wird so lange wiederholt, bis der Fehler eine vorgegebene Toleranz nicht mehr überschreitet oder eine maximale Anzahl von Verfeinerungsstufen erreicht ist. Anschließend geht man zum nächsten Lastschritt über und wiederholt den obigen Vorgang.

### 4.4.3 Datentransfer

Bei linear elastischen Berechnungen erfolgt nach jedem Verfeinerungsschritt eine Neuberechnung auf dem neuen Netz. Bei nichtlinearen Problemen wäre aufgrund der Komplexität eine komplette Neuberechnung nach jedem Verfeinerungsschritt viel zu aufwendig. Man strebt daher eine Weiterberechnung nach jedem Verfeinerungsschritt an. Infolge der Wegabhängigkeit der Lösung erfordert dieses Vorgehen einen Transfer der geschichtsabhängigen Daten [35].

Hierzu zählen die Verschiebungen an den Elementknoten, welche als so genannte *Primärvariablen* bezeichnet werden. Im Gegensatz hierzu bezeichnet man Dehnungen, Spannungen sowie interne Variablen als *Sekundärvariablen*, welche an den Integrationspunkten vorliegen. Die zweitgenannte Gruppe spielt bei reiner geometrischer Nichtlinearität keine Rolle und soll daher hier nicht weiter vertieft werden.

Die Verschiebungen an den Knotenpunkten lassen sich mit Hilfe der Ansatzfunktionen auf die neu generierten Knoten  $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  transformieren

$$\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{nodes} \mathbf{u}_i \phi_i(\mathbf{x}). \quad (4.75)$$

Nach dieser Transformation befindet sich das System jedoch noch nicht im Gleichgewicht. Die Transformation der geschichtsabhängigen Daten von einem alten auf ein neues Netz ist somit als eine Störung des inkrementellen Gleichgewichts aufzufassen [38]. Es ist daher eine weitere Gleichgewichtsiteration nötig, um den Gleichgewichtszustand des neuen Netzes zu finden. In der Praxis hat sich gezeigt, dass hierfür meist nur sehr wenige Iterationen nötig sind.

Weitere ausführliche Darstellungen für physikalisch nichtlineare Probleme findet man beispielsweise in [12], [35], [38].

Generiere ein Startnetz  $\mathcal{T}_k$  und setze  $k = 0$

(A) for  $t = 1$  bis  $M$  (Schleife über alle Lastschritte  $M$ )

$$\lambda = t \cdot \frac{1}{M} \quad \text{aktueller Lastparameter}$$

1. Gleichgewichtsiteration mittels des Newton-Raphson-Verfahrens Box 2.1.

Setze  $i = 0$ ,  $\mathbf{u}_{\Delta_k} = 0$ ,  $\mathbf{u}_k^{(0)} = \mathbf{u}_{k-1}$  und löse die Gleichungen

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k^{(i)}) \mathbf{u}_{\Delta_k}^{(i+1)} = \lambda \cdot \mathbf{f} - \mathbf{k}(\mathbf{u}_k^{(i)})$$

$$\mathbf{u}_k^{(i+1)} = \mathbf{u}_{\Delta_k}^{(i+1)} + \mathbf{u}_k^{(i)}$$

Setze  $i = i + 1$  und wiederhole die Iteration bis das Verfahren konvergiert.

2. Berechnung der Fehlerindikatoren des ursprünglichen Problems  $\eta_e^{(p)}$ .

3. Formulierung und Lösung des dualen Problems am aktuellen Gleichgewichtspunkt  $\mathbf{u}_k$ :

$$\mathbf{K}_T(\mathbf{u}_k) \mathbf{z}_k = \mathbf{j}_k$$

4. Berechnung der Fehlerindikatoren des dualen Problems  $\eta_e^{(z)}$ .

5. Optimierung des Netzes:

- Bestimmung der resultierenden *gewichteten* Fehlerindikatoren

$$\eta_e = \eta_e^{(p)} \cdot \eta_e^{(z)}.$$

- Berechnung des Fehlerschätzers

$$J(e) \approx \eta = \sum_{\Omega_e} \eta_e.$$

- IF  $|\eta| \leq TOL$  (globale Toleranz)  $\rightarrow t = t + 1$ , GOTO (A).
- IF  $\eta_e > TOL_e$  (Toleranz im Element)  $\rightarrow$  Verfeinere das Element  $\Omega_e$ .
- Generiere ein neues Netz  $\mathcal{T}_{k+1}$ , Datentransfer, setze  $k = k + 1$ .
- GOTO 1

**Box 4.1:** Lösungsalgorithmus für zielorientierte Fehlerschätzer bei einer nichtlinearen adaptiven Berechnung

# 5 Numerische Ergebnisse

Im vorliegenden Kapitel soll anhand einiger numerischer Beispiele die Leistungsfähigkeit von zielorientierten Fehlerschätzern innerhalb von adaptiven Verfahren gezeigt werden. Dabei erfolgt immer der Vergleich zu globalen Fehlerschätzern in der Energienorm. Alle Beispiele wurden mit dem FE-Programm WINFEM berechnet. Zur Anwendung kam jeweils ein Scheibenelement mit bilinearen Ansatzfunktionen.

## 5.1 Eingespannte Scheibe

In diesem ersten numerischen Beispiel wird eine eingespannte Scheibe mit einem Schlitz untersucht, siehe Abb. 5.1. Alle Berechnungen erfolgten linear elastisch unter Annahme eines ebenen Spannungszustandes. Das Ziel soll sein, die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\boldsymbol{x} = (8.0, 3.0)$  möglichst genau zu berechnen, d.h.

$$J(\boldsymbol{u}) = \sigma_{xx}(\boldsymbol{x}) \quad \text{bzw.} \quad J(\boldsymbol{u}) = \sigma_{yy}(\boldsymbol{x}).$$

Als quasi exakte Lösung dient eine Vergleichsrechnung mit dem Randelemente Programm BE-SCHEIBE. Bei einer Berechnung mit einer sehr kleinen Randelementlänge ergaben sich folgende Werte für die Spannungen im Punkt  $\boldsymbol{x}$ :

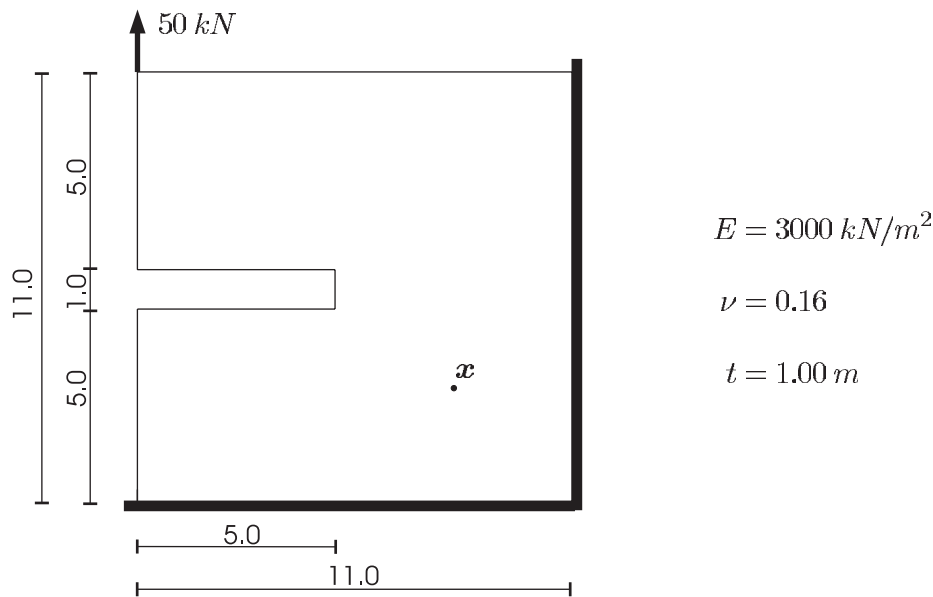
$$\sigma_{xx} = 4.8613 \text{ kN/m}^2 \quad \sigma_{yy} = 7.7547 \text{ kN/m}^2$$

Diese Werte sollen im Folgenden als Referenzlösung  $J(\boldsymbol{u}_{ref})$  dienen. Zur Beurteilung der Schrankeneigenschaften des Fehlerschätzers wird zusätzlich zum berechneten relativen Fehler

$$\eta^{rel} := \left| \frac{\eta}{J(\boldsymbol{u}_h)} \right| \tag{5.1}$$

ein relativer Fehler  $E_{rel}$  bezogen auf die Referenzlösung ausgewertet. Ferner wird zur Beurteilung der Effektivität des Fehlerschätzers der Effektivitätsindex  $I_{eff}$  eingeführt. Beide sind definiert durch

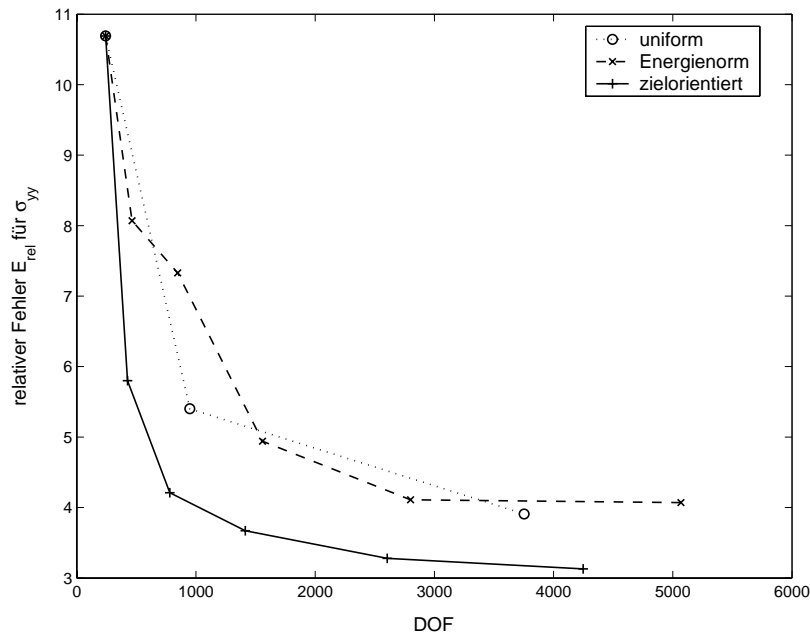
$$E_{rel} := \left| \frac{J(\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h)}{J(\mathbf{u}_{ref})} \right| \quad I_{eff} := \left| \frac{\eta}{J(\mathbf{u}_{ref} - \mathbf{u}_h)} \right|. \quad (5.2)$$



**Abbildung 5.1:** Eingespannte Scheibe mit Schlitz

Die Fehlerschätzer  $\eta$  wurden mit Hilfe eines energienormbasierenden Fehlerschätzers Gl. (3.116) berechnet. Die zu erwartenden Schrankeigenschaften eines solchen Fehlerschätzers sind nicht sehr scharf. In den Tabellen 5.1–5.3 sind die Ergebnisse der zielorientierten Verfeinerung und der Verfeinerung in der Energienorm dargestellt. Die Ergebnisse bestätigen die Voraussage. Die berechneten relativen Fehler  $\eta^{rel}$  sind auf einem groben Netz um ein vielfaches größer als die relativen Fehler  $E_{rel}$  bezogen auf die Referenzlösung. Entsprechend ist der Verlauf des Effektivitätsindex  $I_{eff}$ . Auf einem groben Netz ist demnach der auf Fehlerindikatoren basierende Fehlerschätzer nicht sehr aussagekräftig. Anhand der Werte für  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  erkennt man jedoch, dass das zielorientierte Verfahren sehr schnell gute Werte für die gesuchten Spannungen liefert. Das Netz wird mit Hilfe der Fehlerindikatoren derart optimiert, dass die gesuchten Zielgrößen gut angenähert werden. Bereits bei ca. 800 Freiheitsgraden erhält man relative Fehler für  $\sigma_{yy}$  von ca. 4%, die bei der globalen Verfeinerung in der Energienorm

erst bei ca. 2800 Freiheitsgraden erreicht werden. Entsprechend verhält es sich bei einer gleichmäßigen Verfeinerung, siehe Abb. 5.2. Für einen relativen Fehler von ca. 4% sind bei einer gleichmäßigen Verfeinerung ca. 3700 Freiheitsgrade nötig.



**Abbildung 5.2:** Vergleich der relativen Fehler für  $\sigma_{yy}(\boldsymbol{x})$  bei verschiedenen Verfeinerungsstrategien

Die entstehenden Netze sind in Abb. 5.3 dargestellt. Bei der zielorientierten Verfeinerung sind die Netze im Bereich um den Zielpunkt  $\boldsymbol{x} = (8.0, 3.0)$  stark verfeinert, da die zu den Spannungen gehörigen Greenschen Funktionen in diesem Punkt durch einen Versatz von Eins im Punkt  $\boldsymbol{x}$  erzeugt werden. Um nun diesen Versatz möglichst gut zu approximieren, muss das Netz an dieser Stelle sehr fein sein, siehe Abb. 5.4.

Obwohl die berechneten Fehler  $\eta$  auf groben Netzen keine guten Schrankeigenschaften aufweisen, bestätigen die obigen Aussagen jedoch, dass mit Hilfe der zielorientierten Fehlerindikatoren Netze erzeugt werden, welche mit relativ geringem Aufwand gute Werte für die gesuchte Zielgröße liefern.

**Tabelle 5.1:** Zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{xx}$  im Punkt  $\mathbf{x} = (8.0, 3.0)$ 

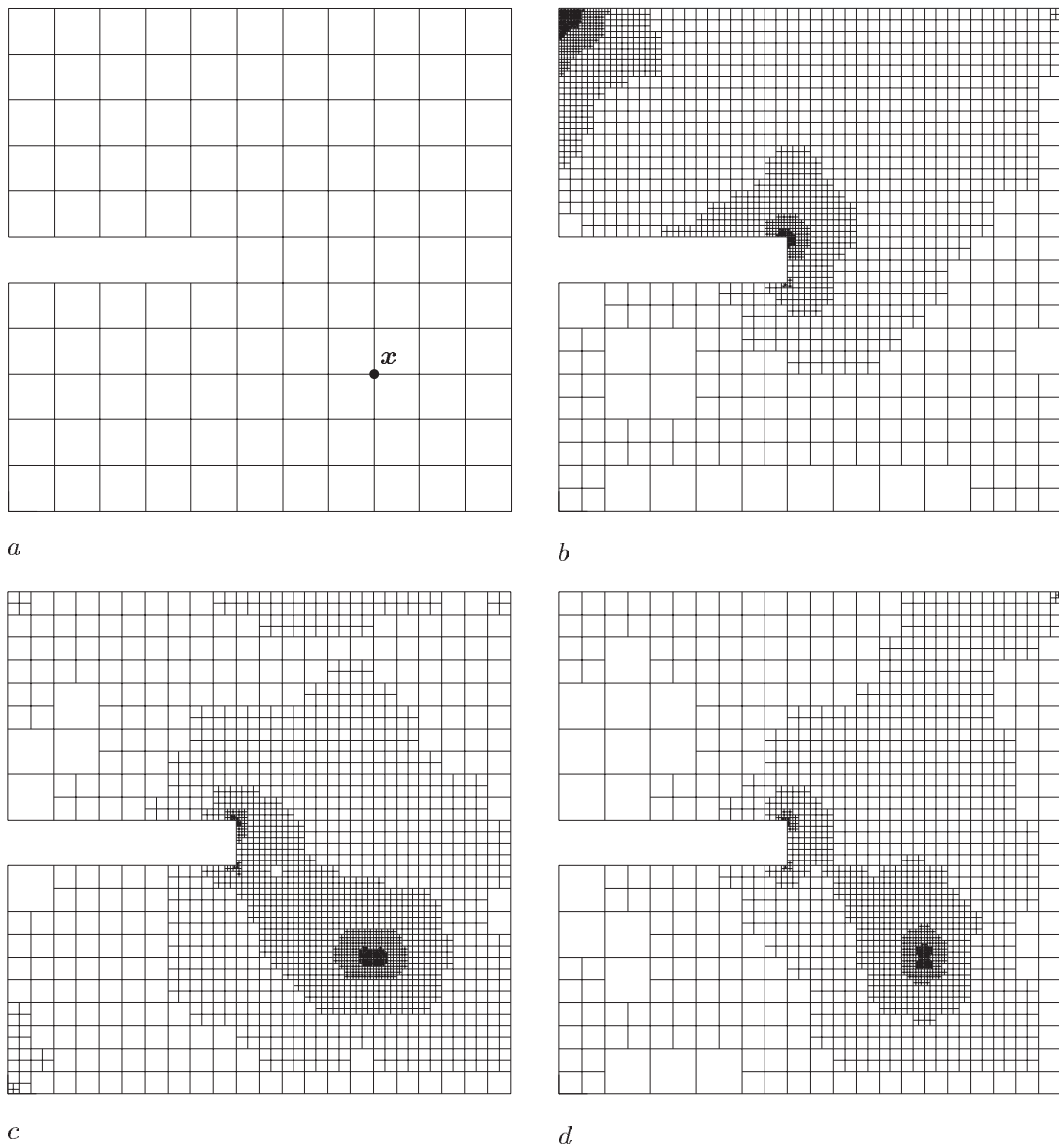
$DOF$	$\sigma_{xx}$	$\eta$	$\eta^{rel}$ [%]	$E_{rel}$ [%]	$I_{eff}$
242	4.5486	7.2525	159.45	6.43	23.19
452	4.7286	3.8722	81.89	2.73	29.18
844	4.7276	2.2319	47.21	2.75	16.69
1584	4.7276	1.2822	27.12	2.75	9.59
2940	4.7204	0.7270	15.40	2.89	5.16
5250	4.7145	0.4192	8.89	3.01	2.86

**Tabelle 5.2:** Zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\mathbf{x} = (8.0, 3.0)$ 

$DOF$	$\sigma_{yy}$	$\eta$	$\eta^{rel}$ [%]	$E_{rel}$ [%]	$I_{eff}$
242	6.9255	7.3607	106.28	10.69	8.87
426	7.3047	4.0754	55.79	5.80	9.06
780	7.4278	2.4391	32.84	4.21	7.46
1414	7.4698	1.4027	18.78	3.67	4.92
2604	7.5003	0.8039	10.72	3.28	3.16
4248	7.5115	0.4966	6.61	3.13	2.04

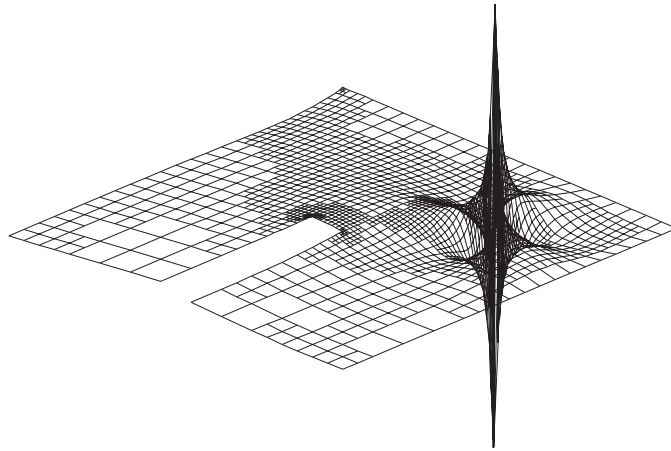
**Tabelle 5.3:** Verfeinerung in der Energienorm.  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\mathbf{x} = (8.0, 3.0)$ 

$DOF$	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$E_{rel}(\sigma_{xx})$ [%]	$E_{rel}(\sigma_{yy})$ [%]
242	4.5486	6.9255	6.43	10.69
464	4.4862	7.1289	7.72	8.07
846	4.4513	7.1860	8.43	7.33
1558	4.4939	7.3713	7.55	4.94
2800	4.6268	7.4362	4.82	4.11
5068	4.6288	7.4394	4.78	4.07



**Abbildung 5.3:** a) Ausgangsnetz b) Verfeinerung in der Energienorm c) zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{xx}(x)$  d) zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{yy}(x)$

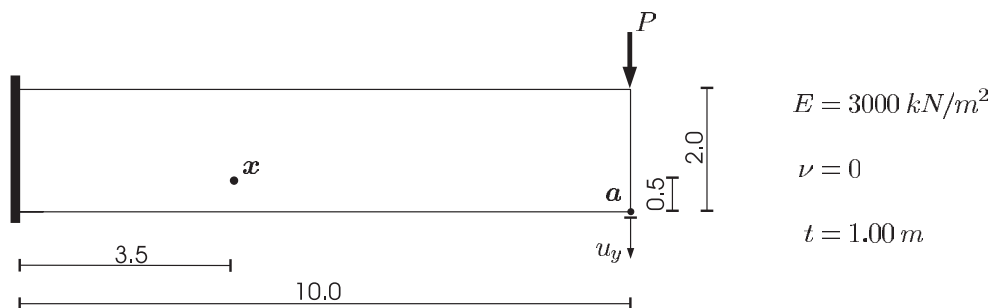




**Abbildung 5.4:** 3D Plot der Greenschen Funktion für  $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$

## 5.2 Klagscheibe

Im vorliegenden Beispiel wird eine schlanke Klagscheibe mit großen Verformungen untersucht, siehe Abb. 5.5. Dies ist ein typisches Beispiel für geometrische Nichtlinearität, wobei vorausgesetzt wird, dass zwar große Verformungen, jedoch nur kleine Verzerrungen entstehen. Alle Berechnungen erfolgten geometrisch nichtlinear unter Verwendung des St. Venant-Kirchhoff-Materials.



**Abbildung 5.5:** Schlanke Klagscheibe

### Kontrolle der Spannungen

Untersucht werden sollen die Spannungen  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\mathbf{x} = (3.5, 0.5)$ . Die Belastung  $P = 25 \text{ kN}$  wurde hierbei in einem Lastschritt aufgebracht. Da keine ex-

akte Lösung für dieses Problem vorhanden ist, wird als quasi exakte Lösung eine Berechnung auf einem sehr feinen Netz mit 4200 Freiheitsgraden herangezogen. Hierbei ergaben sich für die Spannungen im Punkt  $\boldsymbol{x} = (3.5, 0.5)$  folgende Werte:

$$\sigma_{xx} = -108.91 \text{ kN/m}^2 \quad \sigma_{yy} = -11.37 \text{ kN/m}^2$$

Diese sollen im Folgenden als Referenzlösung  $J(\boldsymbol{u}_{ref})$  dienen. Die Fehlerindikatoren wurden mittels (4.41) berechnet. Die ermittelten Spannungen sind in den Tabellen 5.4 und 5.5 dargestellt. Man erkennt deutlich, dass sich bei der zielorientierten Verfeinerung die resultierenden Spannungen sehr schnell dem quasi exakten Werten nähern. Betrachtet man beispielsweise  $\sigma_{yy}$ , dann stellt man fest, dass für einen relativen Fehler von 0.87 % nur 870 Freiheitsgrade nötig sind. Im Gegensatz hierzu erfordert die Verfeinerung in der Energienorm 2260 Freiheitsgrade zum Erreichen eines Fehlers von 0.88 %. Dies zeigt die deutliche Überlegenheit der Dualitätstechniken.

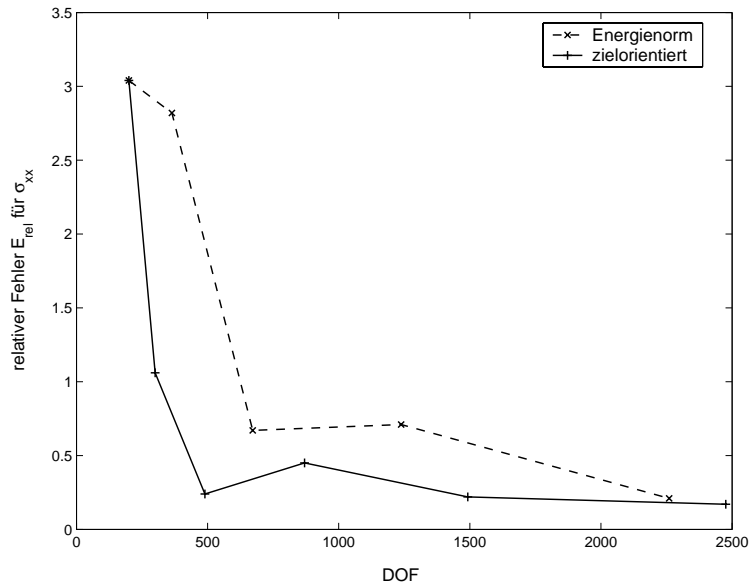
**Tabelle 5.4:** Lokale Fehler bei zielorientierter Verfeinerung für  $\sigma_{xx}$  (links) und  $\sigma_{yy}$  (rechts) im Punkt  $\boldsymbol{x} = (3.5, 0.5)$

<i>DOF</i>	$\sigma_{xx}$	$E_{rel}[\%]$	<i>DOF</i>	$\sigma_{yy}$	$E_{rel}[\%]$
200	-105.60	3.04	200	-10.09	11.26
300	-107.76	1.06	320	-10.97	3.52
490	-109.17	0.24	548	-11.15	1.93
870	-109.41	0.45	970	-11.27	0.87
1492	-109.16	0.22	1766	-11.34	0.26
2476	-109.10	0.17	3266	-11.38	0.09

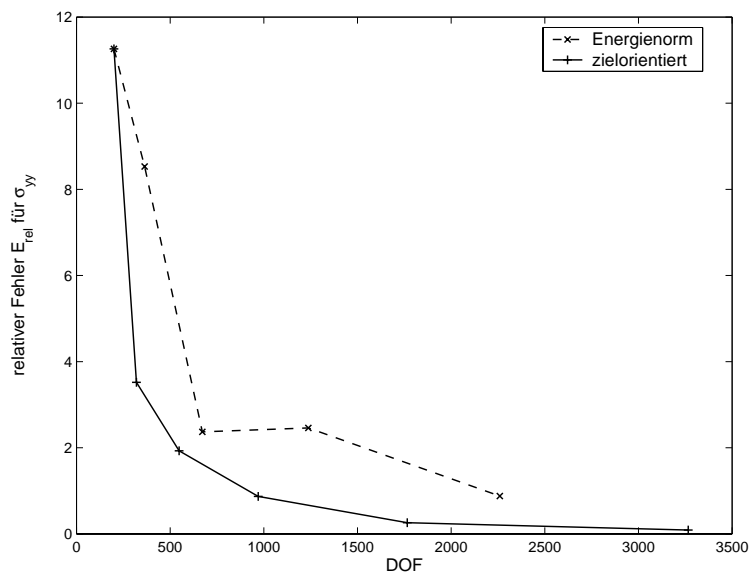
**Tabelle 5.5:** Verfeinerung in der Energienorm.  $\sigma_{xx}$  und  $\sigma_{yy}$  im Punkt  $\boldsymbol{x} = (3.5, 0.5)$

<i>DOF</i>	$\sigma_{xx}$	$\sigma_{yy}$	$E_{rel}(\sigma_{xx})[\%]$	$E_{rel}(\sigma_{yy})[\%]$
200	-105.60	-10.09	3.04	11.26
364	-105.84	-10.40	2.82	8.53
672	-108.18	-11.10	0.67	2.37
1238	-108.14	-11.09	0.71	2.46
2260	-108.68	-11.27	0.21	0.88

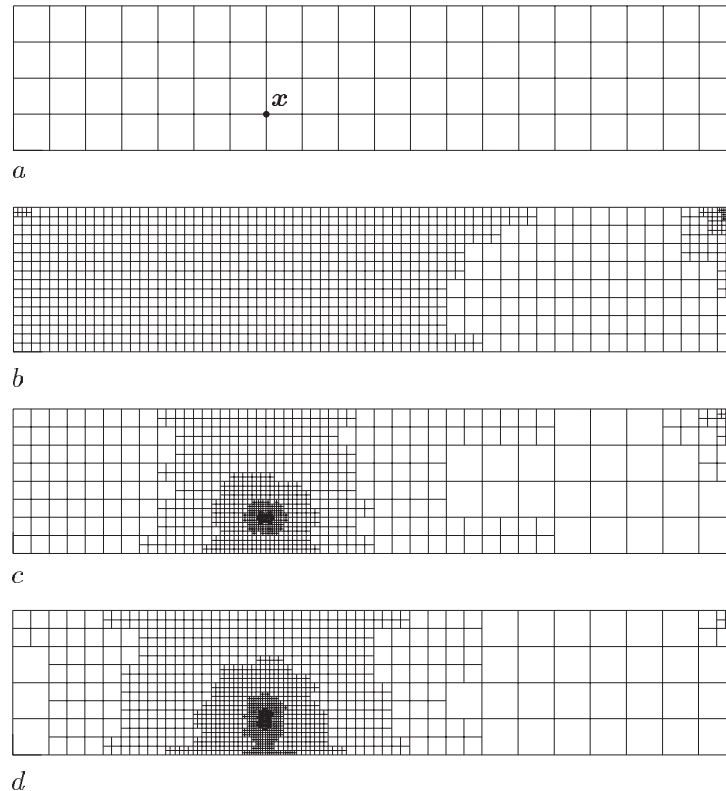
In den Abbildungen 5.6 und 5.7 sind die Verläufe der relativen Fehler für die Spannungen dargestellt. Man erkennt deutlich, dass die Fehler der zielorientierten Fehlerschätzung sehr schnell konvergieren. Die zugehörigen Netze sind in Abb. 5.8 abgebildet.



**Abbildung 5.6:** Relativer Fehler für  $\sigma_{xx}(\boldsymbol{x})$



**Abbildung 5.7:** Relativer Fehler für  $\sigma_{yy}(\boldsymbol{x})$



**Abbildung 5.8:** a) Ausgangsnetz b) Verfeinerung in der Energienorm c) zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{xx}(\mathbf{x})$  d) zielorientierte Verfeinerung für  $\sigma_{yy}(\mathbf{x})$

### Kontrolle der Verschiebung

Um die Leistungsfähigkeit des zielorientierten Fehlerschätzers zu überprüfen, wird nun die Verschiebung  $u_y$  im Punkt  $\mathbf{a} = (10.0, 0.0)$  kontrolliert, d.h.

$$J(\mathbf{u}) = u_y(\mathbf{a}), \quad (5.3)$$

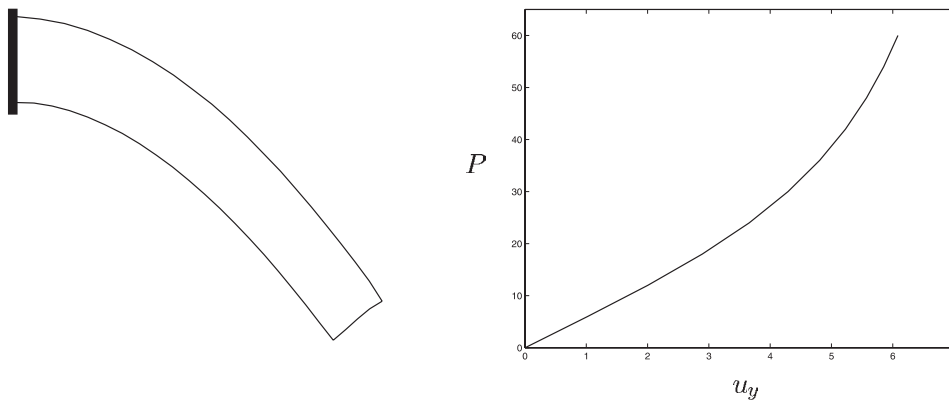
siehe Abb. 5.5. Für eine gewählte Belastung von  $P = 60 \text{ kN}$  wurde auf einem sehr feinen Netz mit 4200 Freiheitsgraden eine quasi exakte Lösung von  $u_y(\mathbf{a}) = 6.0853 \text{ m}$  ermittelt. Dieser Wert dient nun als Referenzlösung  $J(\mathbf{u}_{ref})$ . Die zugehörige Verschiebungsfigur sowie das Last-Verschiebungsdiagramm sind in Abb. 5.9 dargestellt.

Um den Fehlerschätzer zu bewerten, wird analog zum Beispiel im Kapitel 5.1 der relative Fehler bezogen auf die Referenzlösung  $E_{rel}$  mit den berechneten relativen Fehler

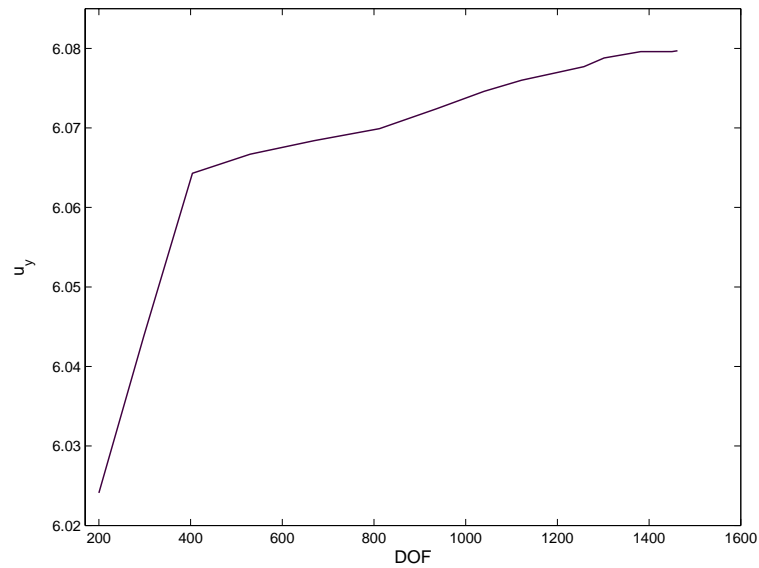
$\eta^{rel}$  verglichen. Als Maß für die Güte des mittels (4.41) berechneten Fehlers dient wieder der Effektivitätsindex  $I_{eff}$ , siehe (5.2). Die Zahlenwerte hierfür sind in Tabelle 5.6 aufgeführt. Anhand dieser Werte wird deutlich, dass der berechnete Fehler gut konvergiert, jedoch zu pessimistisch abgeschätzt ist. Im Vergleich mit den auf die Referenzlösung bezogenen relativen Fehlern  $E_{rel}$  sind die berechneten Fehler  $\eta^{rel}$  zu groß. Die Verwendung eines Fehlerschätzers der Form (4.41) liefert demnach keine engen Fehlergrenzen. Mit Hilfe der berechneten Fehlerindikatoren werden aber Netze generiert, auf denen man sehr schnell gute Werte für die gesuchte Zielgröße erhält, siehe Abb. 5.10. Daher können Fehlerschätzer der Form (4.41) erfolgreich zur adaptiven Netzverfeinerung eingesetzt werden.

**Tabelle 5.6:** Fehlerkontrolle für die Verschiebung  $u_y(\mathbf{a})$

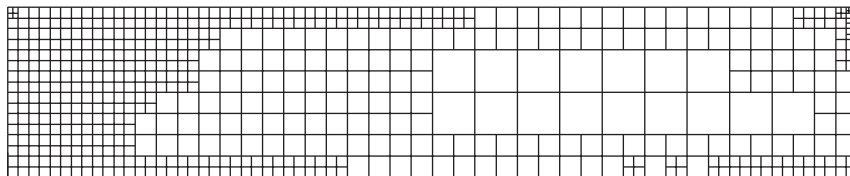
$DOF$	$u_y(\mathbf{a})$	$\eta$	$\eta^{rel}$ [%]	$E_{rel}$ [%]	$I_{eff}$
200	6.0241	0.4024	6.68	1.01	6.57
404	6.0643	0.1993	3.29	0.35	9.49
812	6.0699	0.1015	1.67	0.25	6.59
1040	6.0746	0.0772	1.27	0.18	7.21
1302	6.0788	0.0589	0.97	0.11	9.06
1462	6.0797	0.0520	0.86	0.09	9.28



**Abbildung 5.9:** Verformungsfigur und Last-Verschiebungsdiagramm für  $u_y(\mathbf{a})$



**Abbildung 5.10:** Verschiebung  $u_y(\mathbf{a})$  bei zielorientierter Verfeinerung



**Abbildung 5.11:** Zielorientierte Verfeinerung für  $u_y(\mathbf{a})$

## 6 Zusammenfassung und Ausblick

In der vorliegenden Arbeit wurden die Grundlagen und wichtigsten Konzepte für zielorientierte Fehlerschätzer bei linearen und nichtlinearen Problemen vorgestellt. Mit ihrer Hilfe lassen sich Aussagen über die Güte einzelner lokaler Werte treffen und es ist möglich, das Netz innerhalb von adaptiven Verfahren derart zu optimieren, dass die betrachte lokale Größe möglichst genau berechnet werden kann.

Einführend wurden zunächst die wichtigsten kontinuumsmechanischen Grundgleichungen angegeben, mit deren Hilfe das Randwertproblem der nichtlinearen Elastizitätstheorie in starker und in schwacher Form sowie deren Linearisierung hergeleitet wurden. Am Beispiel der linearen Elastizitätstheorie wurde ein kleiner Überblick über die bereits schon klassischen globalen Fehlerschätzer gegeben.

Mit Hilfe des Projektionssatzes konnte gezeigt werden, dass bei der Berechnung von linearen Problemen mit finiten Elementen, jede beliebige lokale oder globale Größe aus dem Skalarprodukt der projizierten Greenschen Funktion und der gegebenen Belastung berechnet werden kann. Hieraus resultiert, dass die Güte einzelner Größen direkt abhängig ist vom Approximationsfehler in der Greenschen Funktion. Dies ist die Motivation für die zielorientierten Fehlerschätzer. Für lineare Probleme wurden Verfeinerungsindikatoren und Fehlerschätzer für die als Dualitätstechniken bezeichneten Methoden vorgestellt.

Im Anschluss daran wurde das Konzept der zielorientierten Fehlerschätzer auf nichtlineare Probleme übertragen und es wurden die wichtigsten Aspekte sowie der Gesamtalgorithmus einer nichtlinearen adaptiven FE-Berechnung vorgestellt. Die Feh-

lerschätzung erfolgt hierbei am linearisierten Problem, so dass die für lineare Probleme vorgestellten Methoden direkt auf nichtlineare Problemstellungen anwendbar sind. Ebenso wird das duale Problem am betrachteten Linearisierungspunkt formuliert. Die Berechnung des dualen Problems erfordert im Verhältnis zum gesamten nichtlinearen Lösungsprozess relativ wenig Aufwand, da nur ein weiteres lineares Problem gelöst werden muss.

Anhand von numerischen Beispielen für linear-elastische und geometrisch nichtlineare Probleme konnte die Leistungsfähigkeit der Dualitätstechniken veranschaulicht werden. Die Methode erweist sich im Vergleich zu Verfeinerungsstrategien mit globalen Fehlerschätzern in der Energienorm als sehr effizient.

Im Rahmen dieser Arbeit wurden ausschließlich Diskretisierungsfehler betrachtet. Die Fehler innerhalb von numerischen Berechnungen resultieren jedoch auch aus anderen Fehlerquellen, wie beispielsweise den Modellierungsfehlern. Diese sollten bei der Formulierung von Fehlerschätzern einbezogen werden. Die Berücksichtigung dieser Fehler ist Gegenstand der aktuellen Forschung, siehe hierzu ODN in [33]. Das Ziel muss sein, Fehlerschätzer zu konstruieren, welche auf die unterschiedlichsten physikalischen Probleme angewendet werden können und verlässliche Fehlergrenzen liefern.



# Literaturverzeichnis

- [1] Alt, H.-W.: *Lineare Funktionalanalysis*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1992.
- [2] Altenbach, J., Altenbach, H.: *Einführung in die Kontinuumsmechanik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 1994.
- [3] Babuška, I., Rheinboldt, W.: *Error estimates for adaptive finite element computations*. SIAM J. Numer. Anal. 15 (1978), pp. 736-754.
- [4] Bangerth, W., Rannacher, R.: *Adaptive Finite Element Methods for Differential Equations*. Birkhäuser Verlag, Basel Boston Berlin, 2003.
- [5] Bathe, K.-J.: *Finite-Elemente-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 1990.
- [6] Becker, R., Rannacher, R.: *An optimal control approach to a posteriori error estimation in finite element methods*. Preprint, Institut für Angewandte Mathematik, Universität Heidelberg, 2001.
- [7] Becker, W., Gross, D.: *Mechanik elastischer Körper und Strukturen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2002.
- [8] Borst, R., Meyer, C.: *Numerische Probleme bei nichtlinearem Tragwerksverhalten*. In: Mehlhorn, G.: *Der Ingenieurbau, Band Rechenorientierte Baumechanik*. Ernst & Sohn, Berlin, 1995.
- [9] Braess, D.: *Finite Elemente*. Springer-Verlag, Berlin, 1997.
- [10] Ciarlet, P.: *Three-Dimensional Elasticity*. Mathematical Elasticity Volume I. North-Holland, Amsterdam, 1988.
- [11] Ciarlet, P.: *Basic error estimates for elliptic problems*. In *Finite Element Methods (Part 1)*, Bd. II aus *Handbook of Numerical Analysis*. North-Holland, Amsterdam, 1991.

- [12] Cirak, F.: *Adaptive Finite Element Methoden bei der nichtlinearen Analyse von Flächentragwerken*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1998.
- [13] Cirak, F., Ramm, E.: *A-posteriori error estimation and adaptivity for linear elasticity using the reciprocal theorem*. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 156 (1998), pp. 351-362.
- [14] Cirak, F., Ramm, E.: *A-posteriori error estimation and adaptivity for the finite element method using duality principles*. *ZAMM* 79 (1999), pp. 139-142.
- [15] Cirak, F., Ramm, E.: *A posteriori error estimation and adaptivity for elastoplasticity using the reciprocal theorem*. *Int. J. Numer. Meth. Eng.* 47 (2000), pp. 379-393.
- [16] Eriksson K, Estep D, Hansbo P, Johnson C: *Introduction to adaptive methods for differential equations*. *Acta Numerica* (1995), pp. 105-158.
- [17] Feldmann, A.: *Nichtlineare Elastizität inkompressibler Materialien*. Diplomarbeit, Institut für Numerische und instrumentelle Mathematik, Universität Münster, 2000.
- [18] Grätsch, T.: *L<sub>2</sub>-Statik*. Dissertation, Fachgebiet Baustatik, Universität Kassel, 2002.
- [19] Grätsch, T., Bathe, K.-J.: *The state of a posteriori error estimation techniques for use in practical finite element analysis*. Preprint, Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, 2003.
- [20] Graetsch, T., Hartmann, F.: *Pointwise error estimation and adaptivity for the finite element method using fundamental solutions*. Submitted to *International Journal for Numerical Methods in Engineering*.
- [21] Goering H., Roos, H.-G., Tobiska, L.: *Finite-Element-Methode*. Verlag Harri Deutsch, Thun, 1989.
- [22] Hartmann, F.: *The Mathematical Foundation of Structural Mechanics*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1985.
- [23] Hartmann, F.: *Methode der Randelemente*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1987.
- [24] Hartmann, F., Katz, C.: *Statik mit finiten Elementen*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2002.
- [25] Hartmann, F., Katz, C.: *Structural Analysis with Finite Elements*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2004.

- [26] Huerta, A., Rodríguez-Ferran A., Díez, P.: *Error estimation and adaptivity for nonlinear FE analysis*. International Journal of Applied Mathematics and Computer Sciences, Vol. 12 (2002), pp. 59-70.
- [27] Hughes, T.: *The Finite Element Method*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1987.
- [28] Kelly, D., Gago, J.P. de S.R., Zienkiewicz, O., Babuška, I.: *A posteriori error analysis and adaptive processes in the finite element method: Part I-Error analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 19 (1983), pp. 1593-1619.
- [29] Larsson, F., Hansbo, P., Runesson, K.: *Strategies for computing goal-oriented a posteriori error measures in nonlinear elasticity*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 55 (2002), pp. 879-894.
- [30] Link, M.: *Finite Elemente in der Statik und Dynamik*. B.G. Teubner, Stuttgart, 2002.
- [31] Matzenmiller, A.: *Ein relationales Lösungskonzept für geometrisch und physikalisch nichtlineare Strukturberechnungen*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 1988.
- [32] Oden, J.-T., Prudhomme, S.: *Goal-oriented error estimation and adaptivity for the finite element method*. Computers and Mathematics with Applications 41 (2001), pp. 735-756.
- [33] Oden, J.-T., Prudhomme, S.: *Estimation of Modeling Error in Computational Mechanics*. Journal of Computational Physics 182 (2002), pp. 496-515.
- [34] Oden, J.-T.: *A Posteriori Error Estimation*. Preprint # 0574, Texas Institute for Computational and Applied Mathematics, University of Texas, 2002.
- [35] Rudolph, M.: *Ein adaptives Verfahren zur Behandlung elasto-plastischer Problemstellungen des Grundbaus*. Dissertation, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen, Universität München, 1999.
- [36] Runesson, K.: *Goal-oriented Finite Element Error Control and Adaptivity with Emphasis on Nonlinear Material Behavior and Fracture*. 15th Nordic Seminar on Computational Mechanics NSCM 15 (2002), Eds. Lund E., Olhoff J., Stegmann J., pp. 25-32.
- [37] Schmidt, J.-G.: *Ein a-posteriori Fehlerschätzer für die geometrisch nichtlineare Elastizitätstheorie*. Dissertation, Fakultät für Mathematik der Universität Karlsruhe, 2000.
- [38] Steeb, H.: *Fehlerschätzer für FE-Berechnungen bei entfestigenden Materialien*. Dissertation, Institut für Baustatik, Universität Stuttgart, 2002.

- 
- [39] Stein, E., Barthold, F.-J.: *Elastizitätstheorie*. In: Mehlhorn, G.: Der Ingenieurbau, Band Werkstoffe und Elastizitätstheorie. Ernst & Sohn, Berlin, 1996.
- [40] Sonnenschein, U.: *Theorie und Numerik geometrisch nichtlinearer Finite Elemente Berechnungen für das dünnwandige dreidimensionale Kontinuum*. Diplomarbeit, Institut für Mechanik, Universität Kassel, 2001.
- [41] Verfürth, R.: *A posteriori error estimates for non-linear problems. Finite element discretizations of parabolic equations*. Preprint, Universität Bochum, 1995.
- [42] Verfürth, R.: *A review of a posteriori error estimation and adaptive meshrefinement techniques*. Wiley & Sons, B. G. Teubner, 1996.
- [43] Verfürth, R.: *A review of a posteriori error estimation techniques for elasticity problems*. In: On new Advances in adaptive Computational Methods in Mechanics (P. Ladeveze, J. T. Oden, eds.), Elsevier, 1997.
- [44] Wriggers, P.: *Nichtlineare Finite-Element-Methoden*. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg New York, 2001.
- [45] Zienkiewicz, O.C., Zhu, J.Z.: *A Simple Error Estimator and Adaptive Procedure for Practical Engineering Analysis*. International Journal for Numerical Methods in Engineering 24 (1987), pp. 337-357.

## **Erklärung**

Hiermit erkläre ich, dass die vorliegende Arbeit selbstständig, nur unter Verwendung der angegebenen Quellen und Hilfsmittel angefertigt worden ist.

Kassel, den 06.02.2004

.....

Daniel Materna