
Inhaltsverzeichnis

1	Grundlagen	21
1.1	Einführung	21
1.1.1	Partielle Integration	22
1.1.2	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	23
1.1.3	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	24
1.1.4	Der Satz von Betti	25
1.1.5	Einflussfunktionen	26
1.1.6	Identitäten	27
1.2	Greensche Identitäten	28
1.2.1	Längsverschiebung $u(x)$ eines Stabes	30
1.2.2	Schubverformung $w_S(x)$ eines Balkens	32
1.2.3	Durchbiegung w eines Seils	32
1.2.4	Durchbiegung w eines Balkens	33
1.2.5	Durchbiegung w eines Balkens, Theorie II. Ordnung	34
1.2.6	Elastisch gebetteter Träger	34
1.2.7	Zugbandbrücke	35
1.2.8	Torsion	35
1.3	Die Arbeitssätze der Statik	36
1.4	Ein Null-Summen-Spiel	38
1.5	Beispiele	40
1.5.1	Das Prinzip der virtuellen Verrückungen	40
1.5.2	Energieerhaltungssatz	42
1.5.3	Schnittgrößen	43
1.5.4	Das Prinzip der virtuellen Kräfte	43
1.6	Rahmen	46
1.7	Federnde Stützung	48
1.8	Einzelkräfte und Einzelmomente	48
1.9	Lagersenkung	50
1.10	Federn	53
1.11	Temperatur	53
1.12	Die vollständige Arbeitsgleichung	54

1.13	Kurzform	55
1.14	Dualität	56
1.15	Ganze Tragwerke	60
1.16	Mohr contra Betti	63
1.17	Schwache und starke Einflussfunktionen	65
1.18	Die kanonischen Randwerte	67
1.18.1	Zur Notation	69
1.18.2	Gleichgewicht	69
1.18.3	Die Herleitung von $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} + \mathbf{d}$	69
1.18.4	Steifigkeitsmatrizen	71
1.19	Die Reduktion der Dimension	71
1.20	Methode der Randelemente	73
1.21	Singularitätenmethode	78
1.22	Finite Elemente und Randelemente	78
1.23	Digital vs. analog	81
1.24	Testfunktionen	82
1.25	Müssen virtuelle Verrückungen klein sein?	83
1.26	Theorie I. Ordnung	85
1.27	Nur, wenn Gleichgewicht herrscht?	86
1.28	Was ist Weg und was ist Kraft?	87
1.29	Die Zahl der Weg- und Kraftgrößen	87
1.30	Warum das Minus in $-H w'' = p$?	88
1.31	Die virtuelle innere Energie	89
1.32	Satz von Castigliano	90
1.33	Pseudodrehungen	91
1.34	Gleichgewicht	93
1.35	Wie der Mathematiker das Gleichgewicht entdeckt	95
1.36	Die Mathematik hinter dem Gleichgewicht	95
1.37	Gleichgewicht am verformten Tragwerk?	96
1.38	Quellen und Senken	97
1.39	Das Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie	98
1.39.1	Minimum oder Maximum?	99
1.39.2	Wenn das Material reißt	103
1.39.3	Wenn Lager entfallen	104
1.40	Unendliche Energie	107
1.41	Sobolevscher Einbettungssatz	110
1.42	Drehfedern	113
1.43	Der Reduktionssatz	114
1.44	Das Kraftgrößenverfahren	117
1.45	Die Diagonale	118
1.46	Wo läuft es hin?	120
1.47	Finite Elemente und die erste Greensche Identität	121

2 Der Satz von Betti 125

2.1 Grundlagen 126

2.2 Einflussfunktionen für Weggrößen 129

2.2.1 Herleitung 131

2.3 Einflussfunktionen für Kraftgrößen 134

2.3.1 Einflussfunktion für $N(x)$ 137

2.3.2 Einflussfunktion für $M(x)$ 137

2.3.3 Einflussfunktion für $V(x)$ 138

2.3.4 Lagersenkung 139

2.3.5 Temperaturänderungen 141

2.3.6 Die Kette der Einflussfunktionen 141

2.3.7 Lastmomente differenzieren die Einflussfunktionen 142

2.3.8 Ein Rätsel 142

2.4 Statisch bestimmte Tragwerke 144

2.4.1 Polpläne 146

2.4.2 Konstruktion von Polplänen und Verschiebungsfiguren 147

2.4.3 Berechnung der Verdrehungen 147

2.4.4 Berechnung der Verschiebung eines Punktes 150

2.4.5 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.21 152

2.4.6 Einflussfunktion für eine Normalkraft, Bild 2.22 153

2.4.7 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.23 154

2.4.8 Einflussfunktion für ein Moment, Bild 2.24 154

2.4.9 Einflussfunktion für eine Querkraft, Bild 2.25 155

2.4.10 Einflussfunktion für zwei Lagerkräfte, Bild 2.26 157

2.4.11 Kämpferdruck am Bogen, Bild 2.27 157

2.5 Kragträger 159

2.6 Statisch unbestimmte Tragwerke 160

2.7 Einflussfunktionen für Lagerkräfte 163

2.8 Sprünge in Schnittgrößen 167

2.9 Die Nullstellen der Querkraft 168

2.10 Kernpunktmomente 169

2.11 Vierendeel als Kragträger 169

2.12 Dirac Deltas 170

2.13 Dirac Energie 173

2.14 Punktwerte bei Flächentragwerken 177

2.15 Versatz in 2-D und 3-D 181

2.16 Switches 181

2.17 Dualität 182

2.18 Der adjungierte Operator 185

2.19 Monopole und Dipole 185

2.20 Höhere Ableitungen 191

2.21 Die Unwucht 196

2.22 Handicap Rand 198

2.23 Der schiefe Turm von Pisa 200

2.24 Symmetrie und Antimetrie 201

2.25	Lager im Schatten	202
2.26	Einflussfunktionen für integrale Werte	202
2.27	Einflussfunktionen rechnen rückwärts	208
2.28	Historischer Rückblick	211
2.29	Das Abklingverhalten	212
2.30	Prinzip von St. Venant	212
2.31	Fourier	216
2.32	Nichtlineare Effekte	218
2.33	Eigenlösungen	219
2.34	Eigenlösungen und Greensche Funktionen	220
2.35	Theorie II. Ordnung	221
	2.35.1 Shape functions	225
	2.35.2 Steifigkeitsmatrix	226
2.36	Plattenbeulen	227
2.37	Biegedrillknicken	228
3	Finite Elemente	231
3.1	Das Minimum	232
3.2	Warum die Knotenwerte beim Seil exakt sind	235
3.3	Addition der lokalen Lösung	239
3.4	Der Zusammenbau	243
3.5	Die lokale Lösung w_p	247
3.6	Projektion	247
3.7	Äquivalente Knotenkräfte	250
	3.7.1 Die Reichweite der φ_i	252
	3.7.2 Rechenpfennige	252
3.8	Festhaltekräfte	254
3.9	Die Neutralität der shape functions	256
3.10	Shape forces und der FE-Lastfall	257
3.11	Wie die Lawine ins Rollen kam	264
3.12	Finite Elemente mit Betti	265
3.13	Der FE-Lastfall bei Platten	265
3.14	Realism	269
3.15	Kopplung von Bauteilen	270
3.16	Äquivalente Spannungs Transformation	271
3.17	Die Koppelfuge	277
3.18	Gleichgewicht in den Knoten ?	278
3.19	Einflussfunktionen	280
	3.19.1 Beispiel	281
	3.19.2 Der Schlüssel zu den Knotenkräften j_i	281
3.20	Funktionale	284
3.21	Generalisierte Einflussfunktionen	287
3.22	Schwache und starke Einflussfunktionen	287
3.23	Beispiele	288
3.24	Die shape functions und ihre Spannungen	298

3.25 Die lokale Einflussfunktion 298

3.26 Schräger Balken 309

3.27 GF-Anywhere 312

3.28 Aufpunkt im Knoten 312

3.29 Die zentrale Gleichung 312

3.30 Darstellung einer FE-Lösung 316

3.31 Stabtragwerke und $J = \mathbf{g}^T \mathbf{f}$ 317

3.32 Handberechnung 318

3.33 Zustandsvektoren und Messungen 319

3.34 Der Satz von Maxwell 320

3.35 Die inverse Steifigkeitsmatrix 324

3.36 Beispiele 326

3.37 Der Ansatzraum \mathcal{V}_h hat zwei Basen 329

3.38 Allgemeine Form einer FE-Einflussfunktion 332

3.39 Die Dominanz der Spalten \mathbf{g}_i der Inversen 334

3.40 Die Natur macht keine Sprünge, aber die finiten Elemente 335

3.41 Der Weg vom Aufpunkt zur Belastung 337

3.42 Die Spalten von \mathbf{K} und \mathbf{K}^{-1} 339

3.43 Die Inverse als Analysetool 347

 3.43.1 Maximale Verformungen 347

3.44 Lokale Änderungen und die Inverse 348

3.45 Das Weggrößenverfahren 349

 3.45.1 Wie kommt man auf $\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{f}$? 349

 3.45.2 Handberechnung von \mathbf{K} 352

 3.45.3 Drehwinkelverfahren 352

3.46 Mohr und die Flexibilitätsmatrix \mathbf{K}^{-1} 353

3.47 Querschnittsänderungen 354

3.48 Sensitivitätsplots 357

3.49 Knotengleichgewicht 362

3.50 Genäherte shape functions 367

3.51 Die Lagerkräfte der FE-Lösung 367

3.52 Lagersenkung 371

3.53 Einflussfunktion für ein starres Lager 372

3.54 Beispiel EF Lagerkraft 377

3.55 Einflussfunktion für ein nachgiebiges Lager 377

3.56 Einflussfunktionen für Wände 381

3.57 Der Eckenwinkel 382

3.58 Querkräfte bei Platten 382

3.59 Durchstanznachweis 384

3.60 Genauigkeit der Lagerkräfte 390

3.61 Punktlasten und Punktlager bei Scheiben 390

3.62 Ein mögliches Missverständnis 395

3.63 Punktlager sind hot spots 396

3.64 Der amputierte Dipol 397

3.65 Der Dipol am Rand 406

3.66	Einzelkräfte als Knotenkräfte	407
3.67	Vorverformungen	408
3.68	Die Grenzen von FE-Einflussfunktionen	410
3.69	Ein Plädoyer für Einflussfunktionen	411
3.70	Schalenelemente	415
3.71	Kontrolle von FE-Berechnungen	415
3.72	Die Realität	422
3.73	Wie man ein FE-Programm schreibt	424
3.74	Dynamische Probleme	428
3.75	Die Intelligenz der Funktionen	429
4	Betti Extended	433
4.1	Beweis	434
4.2	In welchen Punkten ist die FE-Lösung exakt?	436
4.3	Exakte Werte	442
4.4	Eindimensionale Probleme	443
4.5	Isogeometric Analysis	445
4.6	Flächentragwerke	448
4.7	Punktlager bei Scheiben und Platten und der Unterschied	451
4.8	Wenn die Lösung in \mathcal{V}_h liegt	452
4.9	Patch Test	454
4.10	Adaptive Verfeinerung	455
4.11	Pollution	460
4.11.1	Ursachen	462
4.11.2	Details	463
4.12	Superkonvergenz	464
5	Steifigkeitsänderungen und Reanalysis	471
5.1	Die Kräfte \mathbf{f}^+	472
5.1.1	Rechnen mit den alten Einflussfunktionen	473
5.1.2	Die Schnittgrößen	474
5.2	Parameteridentifikation	474
5.3	Einleitung	475
5.4	Strategie	477
5.5	Addition oder Subtraktion von Steifigkeiten	479
5.6	Dipole und Monopole	480
5.7	Weggrößen und Kraftgrößen	481
5.8	Symmetrie und Antimetrie	484
5.9	Orthogonalität	484
5.10	Das Abklingen der Effekte	486
5.11	Die Bedeutung für die Praxis	487
5.12	Rahmen	492
5.13	Das Kraftgrößenverfahren	492
5.14	Kräfte \mathbf{j}^+	493
5.15	Austausch als Alternative	495

5.16 Die Ableitung der Inversen \mathbf{K}^{-1} 496

5.17 Die Ableitungen $\partial \mathbf{u} / \partial f_k$ und $\partial \mathbf{u} / \partial k_{ij}$ 497

5.18 Integration über das defekte Element 501

5.19 Sensitivitäten und Mohr 504

5.20 Nah und fern 506

5.21 Zusammenfassung 512

5.22 Ein naheliegender Schluss 513

5.23 Lager 514

5.24 Integrale Brücken 521

5.25 Verstärkungen 525

5.26 Klassische Formulierung 525

5.27 Direkte Differentiation 532

5.28 Berechnung von \mathbf{u}_c 532

 5.28.1 Iteration 532

 5.28.2 Direkte Berechnung 534

 5.28.3 Lagersteifigkeit 539

 5.28.4 Sherman-Morrison-Woodbury 539

5.29 Rechentechnik 540

5.30 One-Click Reanalysis 541

 5.30.1 Wenn die Last ‚getroffen‘ wird 545

5.31 Singuläre Steifigkeitsmatrizen 546

5.32 Gauss-Jordan 546

5.33 Drehpole 549

5.34 Nachträglicher Einbau von Gelenken 550

5.35 Knicklasten 551

5.36 Dynamische Probleme 552

5.37 Die Vektoren $\mathbf{f}^+, \mathbf{u}^+, \mathbf{g}^+, \mathbf{j}^+$ 552

 5.37.1 Unsymmetrie in den Ausgleichsbewegungen 553

5.38 Das Kontinuum 554

 5.38.1 Potentialtheorie 555

 5.38.2 Das einzelne Element und das Netz 556

 5.38.3 Variierende Steifigkeiten 557

 5.38.4 Beispiel 560

 5.38.5 Kerne \mathbf{j}^+ 562

 5.38.6 Die zwei Zugänge 563

 5.38.7 Unterschiedliche Stärken 565

6 Singularitäten 569

 6.1 Singuläre Spannungen 569

 6.2 Singuläre Lagerkräfte 570

 6.3 Einzelkräfte 572

 6.4 Das Abklingen der Spannungen 575

 6.5 Kragträger 579

 6.6 Je weiter desto tiefer 579

 6.7 Unendlich große Spannungen 580

6.8	Symmetrie der Wirkungen	584
6.9	Kragscheibe	584
6.10	Standardsituationen	589
6.11	Zu glatt ist auch nicht gut	591
6.12	Singularitäten in Einflussfunktionen	593
7	Gemischte Formulierungen	605
7.1	Das System des Stabes	605
7.2	Der vollständige Balken (Bernoulli-Balken)	607
7.2.1	LF Temperatur	608
7.3	Der schubweiche Balken (Timoshenko Balken)	608
7.4	Poisson Gleichung	611
7.5	Die Scheibengleichung	612
7.6	Die schubstarre Platte (Kirchhoff)	614
7.7	Die schubweiche Platte (Reissner-Mindlin)	619
7.8	Shear locking	621
7.9	Einflussfunktionen	623
7.10	Betti extended	625
8	Nichtlineare Probleme	627
8.1	Einführung	627
8.2	Gateaux Ableitung	628
8.3	Nichtlinearer Stab	630
8.3.1	Newton Verfahren	630
8.4	Geometrisch nichtlinearer Balken	631
8.4.1	Energieerhaltungssatz	633
8.5	Geometrisch nichtlineare Kirchhoffplatte	635
8.6	Nichtlineare Elastizitätstheorie	635
8.6.1	Linearisierung	637
8.6.2	Ein Fachwerkstab im Raum	638
8.6.3	Ebenes Problem	640
8.7	Nichtlineare Funktionale	644
9	Die Algebra der Statik	647
9.1	Grundlagen	648
9.2	Notation	651
9.3	Gauss garantiert das	652
9.4	Multiplikation von Matrizen	653
9.5	FE-Notation	654
9.6	Vektoren und Funktionen	655
9.7	Erste Variation	656
9.8	Selbstadjungiert	657
9.9	Die Algebra der Identitäten	658
9.10	Die Algebra der finiten Elemente	662
9.11	Schiefe Projektion	664

9.12 Eigenwerte und Eigenvektoren 665

9.13 \mathcal{V}_h und \mathcal{V}_h^+ 667

9.14 Galerkin 668

9.15 Schwache Lösung 668

9.16 Variation und Greensche Identität 672

9.17 Das Grundfunktional (Hu-Washizu) 672

9.18 Kraftgrößenverfahren versus Weggrößenverfahren 674

9.19 Der adjungierte Operator und die Greensche Funktion 675

9.20 Die Ableitungen der Dirac Deltas 677

9.21 Das Seil 679

9.22 Schalen 680

9.23 Die h -Vertauschungsregel 681

9.24 Filter 682

9.25 Poisson Gleichung 683

 9.25.1 Flächenlasten 685

9.26 Potentiale und Potentialtheorie 685

9.27 Lagrange und Hamilton 686

9.28 Variationsrechnung 687

9.29 Einzelkraft in einer Scheibe 688

9.30 Antimetrie in den vertikalen Einflussfunktionen 690

9.31 Multipole 690

9.32 Steifigkeitsmatrizen 1-D 692

9.33 Die Dimension der f_i 692

9.34 Transformationen 693

9.35 Konischer Stab 697

9.36 Näherungen 699

9.37 Schwache und starke Einflussfunktionen 700

9.38 Wie kommt der Einbettungssatz zu seinem Namen? 700

9.39 Negative Normen 706

9.40 Punktlasten und ihre Energie 707

9.41 Early Birds 708

10 Shape functions und MATLAB 711

 10.1 Balken mit beliebiger Belastung 711

 10.2 Einheitsverformungen Th. II. Ordg. 711

 10.3 Balken, h linear 714

 10.4 Dirac Delta 719

 10.4.1 EF für $w(x)$ 719

 10.4.2 EF für $M(x)$ und $V(x)$ mit Dirac Delta 719

 10.5 Stab, h linear 721

 10.6 Gebetteter Balken 722

 10.6.1 Zahlenbeispiel 724

 10.7 Seil mit finiten Elementen 726

11 Nachwort 731

18	Inhaltsverzeichnis	
12	Software	741
	Literaturverzeichnis	743
	Literatur	743
	Index	755